



# Contributions Numériques à l'Etude des Fonctions de Green et des Propriétés du Vide de la Chromodynamique Quantique

Hervé Moutarde

## ► To cite this version:

Hervé Moutarde. Contributions Numériques à l'Etude des Fonctions de Green et des Propriétés du Vide de la Chromodynamique Quantique. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Paris Sud - Paris XI, 2003. Français. NNT: . tel-00003120

**HAL Id: tel-00003120**

**<https://theses.hal.science/tel-00003120>**

Submitted on 11 Jul 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° D'ORDRE : 7227

UNIVERSITÉ PARIS XI  
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES**

**DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY**

PAR

Hervé MOUTARDE

**Contributions Numériques à l'Étude des Fonctions de Green et  
des Propriétés du Vide de la Chromodynamique Quantique**

Soutenue le 20 juin 2003 devant la commission d'examen :

M. Michel DAVIER	Président
M. Georges GRUNBERG	Rapporteur
M. Laurent LELLOUCH	Rapporteur
M. Olivier PÈNE	
M. Claude ROIESNEL	Directeur de thèse
M. Klaus SCHILLING	



---

## Remerciements

---

**D**E NOMBREUSES PERSONNES ont permis de mener ce travail à bien dans d'excellentes conditions, faisant de ces trois années de thèse une expérience enrichissante scientifiquement et humainement.

Je tiens tout d'abord à remercier mes collègues et amis A. Abada, Ph. Boucaud, F. de Soto, G. Herdoiza, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et C. Roiesnel du groupe “franco- andalou” de Chromodynamique Quantique sur réseau de m'avoir accueilli au sein de leur équipe et d'avoir collectivement encadré mes travaux par leur patience et leur constante disponibilité.

Au-delà des interactions avec les phénoménologues des particules de Polytechnique et d'Orsay, une bonne part de ma compréhension personnelle de la physique est due à de stimulantes discussions avec les physiciens constructivistes C. de Calan, J. Magnen et V. Rivasseau, ainsi qu'avec mes collègues doctorants S. Afchain et D. Orlando, et expérimentateurs F. Fleuret et R. Granier de Cassagnac. De tous ces échanges, je retiendrai notamment que les questions les plus naïves sont souvent les plus profondes et celles auxquelles il est le plus difficile de répondre.

Par ailleurs, je remercie les directeurs des laboratoires qui m'ont accueilli, M.-N. Bussac puis P. Mora au CPhT à Polytechnique, et D. Schiff au LPT à Orsay, ainsi que les responsables de l'Ecole Doctorale “Constituants élémentaires, systèmes complexes” P. Binétruy et Y. Charon qui m'ont permis de débiter cette thèse à mon retour de l'Université de Cambridge.

Enfin, je suis reconnaissant à M. Davier, G. Grunberg, L. Lellouch, O. Pène, C. Roiesnel et K. Schilling de m'avoir fait l'honneur et l'amitié de constituer mon jury de thèse, avec une pensée particulière pour G. Grunberg et L. Lellouch qui ont accepté la lourde tâche de rapporteur.



---

# Table des matières

---

<b>Avant-propos</b>	<b>1</b>
<b>I QCD : du continu au réseau</b>	<b>3</b>
I.1 Premiers principes . . . . .	3
I.2 Régularisation et anomalie chirale . . . . .	5
I.2.1 Démarche naïve . . . . .	6
I.2.2 Le théorème “de No-Go” de Nielsen et Ninomiya . . . .	10
I.2.3 Solutions proposées . . . . .	12
I.3 Renormalisation non-perturbative . . . . .	14
I.3.1 Principes généraux et aspects non-perturbatifs . . . . .	14
I.3.2 De la théorie aux valeurs numériques . . . . .	16
I.4 Fixation de jauge . . . . .	20
I.4.1 Difficultés théoriques . . . . .	21
I.4.2 Difficultés numériques . . . . .	25
I.5 Aspects de basse énergie . . . . .	27
I.5.1 Pôle de Landau et causalité . . . . .	27
I.5.2 Développements perturbatifs en QCD . . . . .	30
I.5.3 Fonctions de Green et critères de confinement . . . . .	33
<b>II Analyse asymptotique des fonctions de Green</b>	<b>37</b>
II.1 Evaluation sur réseau . . . . .	37
II.1.1 Méthode des fonctions de Green . . . . .	37
II.1.2 Symétrie hypercubique et artefacts . . . . .	40
II.2 Développement en produit d’opérateurs des fonctions de Green	44
II.2.1 Calculs en arbre . . . . .	46
II.2.2 Calculs perturbatifs des coefficients de Wilson . . . . .	54
II.3 Analyse des données . . . . .	58
II.3.1 Données “quenched” . . . . .	58
II.3.2 Données “unquenched” . . . . .	62
II.3.3 Conclusions générales . . . . .	69

II.4	Opérateur $A^2$ . . . . .	72
II.4.1	Nécessité de l'analyse OPE . . . . .	72
II.4.2	Phénoménologie émergente de $\langle A^2 \rangle$ . . . . .	76
<b>III</b>	<b>Instantons et vide de QCD</b>	<b>83</b>
III.1	Instantons : concepts et phénoménologie . . . . .	83
III.1.1	Anomalie axiale . . . . .	84
III.1.2	Brisure spontanée de la symétrie chirale . . . . .	88
III.1.3	L'instanton de Belavin, Polyakov, Schwartz et Tiupkin . . . . .	89
III.1.4	Modèle de liquide d'instantons . . . . .	91
III.2	Sonder la structure du vide par les fonctions de Green . . . . .	95
III.2.1	Procédure de refroidissement (" <i>cooling</i> ") . . . . .	95
III.2.2	Identification des instantons . . . . .	98
III.2.3	$\langle A^2 \rangle$ et instantons . . . . .	101
III.2.4	Comportement infra-rouge de $\alpha_s$ et instantons . . . . .	103
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Formulaire perturbatif</b>	<b>113</b>
A.1	Fonction $\beta$ . . . . .	113
A.1.1	Schéma $\overline{\text{MS}}$ . . . . .	113
A.1.2	Schéma $\widetilde{\text{MOM}}$ . . . . .	114
A.1.3	Schéma MOM . . . . .	114
A.2	Propagateur du gluon . . . . .	114
A.2.1	Propagateur en MOM développé en $\alpha_s^{\widetilde{\text{MOM}}}$ . . . . .	115
A.2.2	Propagateur en MOM développé en $\alpha_s^{\text{MOM}}$ . . . . .	115
A.3	Dimension anormale de $A^2$ . . . . .	116
A.4	Conversion des valeurs de $\Lambda_{\text{QCD}}$ . . . . .	116
A.4.1	$\widetilde{\text{MOM}}$ vers $\overline{\text{MS}}$ . . . . .	116
A.4.2	MOM vers $\overline{\text{MS}}$ . . . . .	117
<b>B</b>	<b>Publications</b>	<b>119</b>
B.1	Preliminary calculation of $\alpha_s$ from Green functions with dynamical quarks. . . . .	121
B.2	Instantons and the $\langle A^2 \rangle$ condensate. . . . .	139
B.3	Transparent expression of the $A^2$ condensate's renormalisation. . . . .	145
	<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>

---

# Table des figures

---

I.1	Masses de valence et de la mer dans les simulations actuelles. Figure extraite de [Sha00]. . . . .	19
I.2	Région de Gribov et région fondamentale modulaire. Les lignes en pointillés rejoignent des points d'une même orbite de jauge, et montrent la topologie non-triviale de $\Gamma$ , ensemble des champs de jauge transverses. Figure extraite de [SBZ02]. . . . .	24
I.3	Singularités dans le plan de Borel. Figure extraite de [Ben98]. . .	32
II.1	$\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$ évalué à partir du vertex asymétrique avec (en haut) et sans (en bas) corrections en sinus. Les données à $\beta \in \{6,0; 6,2\}$ s'ajustent sur une même courbe lisse avec corrections en sinus ; sans les corrections en sinus, un "décrochement" est perceptible, signalant un effet en $\mathcal{O}(a^2 p^2)$ . Même avec corrections en sinus, $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$ décroît en fonction de $\mu$ et n'atteint pas encore sa valeur asymptotique. Les mailles sont fixées à partir de [BS92]. . . . .	43
II.2	$p^2 G_{\text{Latt}}^{(2)}$ (cercles blancs) et $\hat{p}^2 G_{\text{Latt}}^{(2)}$ (cercles noirs). . . . .	44
II.3	Extrapolation en $p^{[4]}$ (points) et sélection des orbites "démocratiques" (croix). . . . .	45
II.4	Evaluations de $\alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}}$ issues des réseaux à $\beta \in \{6,0; 6,2; 6,4; 6,8\}$ sur des volumes $24^4$ . . . . .	59
II.5	Fits combinés du propagateur du gluon renormalisé à 10 GeV et $\alpha_S^{\text{MOM}}$ sur la fenêtre [2,5 GeV; 10 GeV]. La courbe en pointillés représente la partie perturbative. . . . .	61
II.6	Evaluations de $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$ issues des réseaux à $\beta \in \{6,0; 6,2; 6,4; 6,8\}$ sur des volumes $24^4$ avec (au-dessous) et sans (en-dessus) correction en puissance. $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$ est obtenu à partir de $\alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}}$ . . . . .	62
II.7	$\chi^2/\text{d.d.l.}$ du fit en fonction de l'exposant $r$ ; le point sur la courbe correspond à la valeur issue de l'hypothèse d'insertion. . . . .	63
II.8	Ajustement des données issues de réseaux de mailles de plus en plus fines à $\beta \in \{5,6 ; 5,8 ; 6,0\}$ sur une courbe polynômiale. . . . .	65



## TABLE DES FIGURES

II.9	Fits avec correction en puissance (en haut) et sans correction en puissance (en bas). . . . .	66
II.10	Extrapolation à la limite du continu des masses des hadrons avec fermions dynamiques de Wilson [Lip97a] et spectre des hadrons pour des fermions “quenched” de Wilson avec et sans amélioration $\mathcal{O}(a)$ [EHK97]. . . . .	68
II.11	Evolution de $\alpha_s$ et points de mesures expérimentales (en haut) et répartition générale des valeurs de $\alpha_s(M_Z)$ (en bas) [PDG02]. . .	70
II.12	Constante de couplage extraite du vertex symétrique évaluée à partir de données issues de neuf réseaux différents. . . . .	72
II.13	Propagateur du gluon évalué sur réseau, entre 0 et $\simeq 9$ GeV, renormalisé à 10 GeV dans le schéma MOM. . . . .	73
III.1	Allure de la densité spectrale de l’opérateur de Dirac. Figure extraite de [Dia96]. Le quart de cercle montre la contribution des instantons à la densité spectrale de l’opérateur de Dirac. L’autre ligne pleine représente la densité spectrale de la théorie libre. Enfin, la courbe en pointillés reproduit l’allure de la densité spectrale de la théorie en interactions. . . . .	94
III.2	Lissage des fluctuations du champ de jauge ( $\beta=6,0$ ) par application de la procédure de refroidissement. La quantité $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ est représentée toutes les cinq itérations de la procédure de refroidissement. . . . .	97
III.3	Propagateur du gluon effectif à $\beta=6,0$ sur un réseau $24^4$ . Les points représentent le propagateur après plusieurs itérations de la procédure de refroidissement, et les lignes hachurées la prédiction analytique (III.68). $n^2$ identifie une classe d’orbites hypercubiques. . . .	100
III.4	Extrapolation vers la configuration chaude de $\langle A^2(n_c) \rangle_{\text{inst}}$ . . . . .	102
III.5	(b) : $\alpha_s$ extrait du vertex symétrique. (a) : zoom sur la région de basse énergie $\leq 0,8$ GeV. . . . .	105
III.6	En haut : $\alpha_s^{\text{MOM}}$ après 200 pas de la procédure de refroidissement sur un réseau $24^4$ à $\beta=6,0$ . L’axe des abscisses est gradué en GeV. En bas : graphique logarithmique de $\alpha_s^{\text{MOM}}$ après un nombre d’itérations de la procédure de refroidissement compris entre 30 et 200. . . . .	107

---

## Liste des tableaux

---

I.1	Calcul “quenched” (gauche) et calcul “unquenched” (droite). . . .	20
II.1	A gauche : Vertex symétrique (Schéma MOM). A droite : Vertex asymétrique (Schéma $\widetilde{\text{MOM}}$ ). . . . .	38
II.2	Membre de gauche de (II.24) “sandwiché” entre deux gluons mous évalué au logarithme dominant. L’étoile repère les propagateurs des gluons mous. . . . .	51
II.3	Membre de droite de (II.24) “sandwiché” entre deux gluons mous évalué au logarithme dominant. L’étoile repère les propagateurs des gluons mous. . . . .	51
II.4	Contributions de $A^2$ au propagateur du gluon. . . . .	51
II.5	Contributions de $A^2$ au vertex gluonique symétrique à 3 points. .	52
II.6	Diagrammes donnant la dimension anormale de $A^2$ à une boucle. La régularisation de la divergence infra-rouge s’opère en insérant $A^2$ (représenté par la boule colorée) à l’impulsion $-2q$ . . . . .	55
II.7	Données “quenched” produites. . . . .	59
II.8	Réseaux utilisés dans l’étude “unquenched”. La statistique est $\mathcal{O}(100)$ configurations dans chaque cas. $\kappa_{\text{mer}}$ désigne la masse nue des fermions dynamiques. . . . .	64
II.9	“Fit” du propagateur du gluon en tenant compte ( $\chi^2_{\text{OPE}}/d.d.l.$ ) ou non ( $\chi^2_{\text{pert}}/d.d.l.$ ) de corrections non-perturbatives de type OPE. .	67
II.10	Comparaisons des valeurs de $\langle A^2 \rangle$ extraites de la constante de couplage et du propagateur du gluon pour les données “unquenched”. .	67
III.1	Comparaison des deux méthodes d’identification des structures instantoniques. . . . .	101
III.2	Evaluation du rayon moyen des instantons par la procédure de reconnaissance de forme. . . . .	101

*LISTE DES TABLEAUX*

III.3 Comparaison des valeurs de la densité instantonique après 200 pas de la procédure de refroidissement sur différents réseaux. Ces valeurs sont obtenues par la méthode de reconnaissance de forme et par “fit” de $\alpha_S^{\text{MOM}}$ . . . . .	106
--	-----

---

## Avant-propos

---

*“Although this may seem a paradox, all exact science is dominated by the idea of approximation.”*

**Bertrand Russel**

**Q**U’EST-CE QU’UNE THÉORIE DE CHAMP? Lors de sa conférence Nobel de 1982, K.G. Wilson a rappelé qu’il s’était longuement interrogé sur ce point au début des années 60. Un critère utile et astreignant qu’il imposa est qu’une théorie de champ correctement formulée doit être résoluble numériquement au moyen d’un ordinateur, avec une précision illimitée, si ce n’est par la puissance de calcul accessible. De plus, il initia l’approche “réseau”, qui offre conceptuellement une manière naturelle de supprimer les contributions physiques de petite distance sans briser la symétrie de jauge. Il est de ce fait significatif que la personne qui a contribué à façonner notre compréhension moderne de la renormalisation et du groupe de renormalisation ait aussi été le premier à ouvrir la voie pour simuler numériquement la Chromodynamique Quantique.

Qu’en est-il près de quarante ans plus tard? La Chromodynamique Quantique est unanimement reconnue comme la théorie décrivant l’interaction forte, mais le traitement *quantitatif* de ses aspects de basse énergie à *partir des premiers principes* demeure peu accessible en-dehors des études numériques sur réseau. Cependant, poursuivant les idées de Wilson sur le groupe de renormalisation, il se peut que la Chromodynamique Quantique ne soit qu’une théorie effective, approximation de basse énergie d’une théorie encore à découvrir. Même si c’est bien le cas, les physiciens ont aujourd’hui l’espoir que cette approximation soit mathématiquement bien définie, ou, énoncé autrement, qu’elle “existe mathématiquement” en tant qu’objet isolé. Pour conforter cette

opinion, les simulations numériques laissent clairement entendre que le phénomène du confinement est inclus dans la théorie telle que nous la formulons, et n'est pas une pièce supplémentaire d'un puzzle encore incomplet.

Les mystères physiques et mathématiques qui demeurent sont en eux-mêmes suffisamment intrigants et nombreux pour motiver encore l'étude fine de la Chromodynamique Quantique à partir des premiers principes. Les points d'interrogation ne manquent pas. Quand cesse la validité de l'approche perturbative? Quelles sont les excitations duales de la théorie? Les mécanismes de confinement suggérés sont-ils les phénomènes réellement mis en jeu? La démarche intellectuelle propre à une science expérimentale nous impose de mettre toutes ces idées à l'épreuve de la confrontation quantitative à la Nature.

Une théorie avec des quarks de masses nulles admettrait encore un spectre de particules massives. Fait inconcevable à l'époque des balbutiements du modèle des quarks, l'énergie potentielle des états liés est *positive*, et ne semble due qu'à une grandeur dimensionnée unique. L'étude précise de la constante de couplage de la Chromodynamique Quantique est vraisemblablement un moyen d'atteindre la valeur de cette échelle fondamentale, peut-être son mécanisme de création, et la physique de l'hadronisation ou du confinement.

Le travail présenté dans cet exposé s'articule autour d'une perspective originale, consistant à étudier la structure de l'état fondamental de la Chromodynamique Quantique à l'aide des fonctions de Green et de la constante de couplage. Après avoir rappelé les premiers principes de la théorie de l'interaction forte, nous décrivons nos résultats des évaluations numériques des fonctions de Green et de la constante de couplage avec et sans fermion dynamique. Nous expliquons enfin en quoi le modèle de liquide d'instantons offre un éclairage sur la structure du vide de la Chromodynamique Quantique et une interprétation efficace et cohérente de l'ensemble des données que nous avons produites numériquement, aussi bien dans la région profondément infra-rouge que dans le "proche" ultra-violet.

# Chapitre Un

---

## QCD : du continu au réseau

---

### I.1 Premiers principes

La Chromodynamique Quantique (QCD) est la théorie décrivant notre compréhension actuelle de l'interaction forte. Elle postule que les hadrons sont constitués de fermions, les *quarks*, interagissant entre eux par l'échange de bosons vecteurs, les *gluons* ; ces particules portent un nombre quantique dit *couleur*.

La QCD stipule que les quantités physiques calculées sont invariantes sous l'effet d'une redéfinition arbitraire des états de couleur en tout point de l'espace-temps. Ce principe premier s'exprime mathématiquement en disant que la QCD est une théorie quantique de champ dont le Lagrangien est invariant sous le groupe de jauge  $SU(3)$  ; si nous supposons de plus la théorie *renormalisable*, alors son Lagrangien est parfaitement déterminé :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{\psi=u,d,s,c,b,t} \bar{\psi}(i\not{D} - m_{\psi})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2}F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} \quad (\text{I.1})$$

où  $\theta$  est un paramètre adimensionné caractérisant les propriétés topologiques du vide de la QCD. Ce paramètre (et donc la violation de CP qu'il induit) sera négligé jusqu'au CHAP. III. Suivant l'usage, nous notons  $t^a$  les huit générateurs de l'algèbre de Lie  $su(3)$ , et :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu}A_{\nu}^a - \partial_{\nu}A_{\mu}^a + gf^{abc}A_{\mu}^b A_{\nu}^c \quad (\text{I.2})$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igt^a A_{\mu}^a \quad (\text{I.3})$$

Une transformation infinitésimale (multiplication par  $\exp^{-it^a\epsilon^a}$  du champ de jauge) s'écrit :

$$A_{\mu}^a \mapsto A_{\mu}^a + \delta A_{\mu}^a \quad \text{où} \quad \delta A_{\mu}^a = f^{abc}\epsilon^b A_{\mu}^c - \frac{1}{g}\partial_{\mu}\epsilon^a \quad (\text{I.4})$$

## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

$$\psi \mapsto \psi + \delta\psi \quad \text{où} \quad \delta\psi = -i\epsilon^a t^a \psi \quad (\text{I.5})$$

Cette théorie dépend donc a priori de six paramètres, les masses des quarks ; il faut ajouter à cela un paramètre engendré *dynamiquement*,  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , qui brise l'invariance conforme de la théorie, a priori présente dans la limite de masse des quarks nulle. Dans ce cas, il s'agit de la seule constante dimensionnée de la théorie, échelle non-perturbative responsable de la masse des hadrons.

La richesse des phénomènes physiques prédits par la théorie est étonnante au regard de la simplicité de son énoncé, ce qui place la QCD dans une position quasi-unique vis-à-vis de l'histoire des sciences. Les nombreux succès expérimentaux [PDG02] obtenus dans le secteur des hautes énergies sont dûs à la propriété remarquable de *liberté asymptotique*. Ils sont décrits par un nombre finalement faible de paramètres indépendants. De manière surprenante, les degrés de libertés élémentaires de la théorie ne sont pas ceux observés. Plus précisément, les mystères conceptuels qui entourent la QCD s'articulent en fait autour des trois questions suivantes [JW00], qui attendent encore une formulation mathématique et une compréhension physique satisfaisantes :

- Les quarks sont *confinés* à l'intérieur des hadrons ;
- La théorie possède un “*mass gap*”, si bien que l'interaction forte est de courte portée ;
- Dans la limite de masses de quarks nulles, l'état de plus basse énergie de la QCD, le *vide*, brise la symétrie chirale.

Ces phénomènes concernent les propriétés de basse énergie de la théorie, secteur dans lequel l'approche perturbative héritée de notre compréhension de la QED ne s'applique plus.

La QCD sur réseau est la seule approche connue à l'heure actuelle permettant de faire des calculs non-perturbatifs en reposant uniquement sur les premiers principes. Cette méthode ne se contente d'ailleurs pas d'explorer les propriétés infra-rouges de l'interaction forte, mais établit un véritable pont entre les basses et les hautes énergies. Ceci offre une perspective unique sur la théorie, notamment dans sa capacité à définir de manière non-perturbative des aspects conceptuels rencontrés analytiquement dans le cadre de l'approche perturbative, telle que l'anomalie chirale [Zin02]. La QCD sur réseau est aussi un terrain d'essai idéal de tests de mécanismes qualitatifs du confinement, tels que la loi des aires de la boucle de Wilson. Enfin, elle permet des prédictions dont la précision est arbitraire *dans la limite des moyens de calculs disponibles* ; ce dernier point est crucial dans un contexte scientifique où la précision expérimentale est souvent bien meilleure que celle théorique.

## I.2 Régularisation et anomalie chirale

Construire une théorie décrivant les interactions locales d'objets ponctuels impose de décrire formellement les objets en question par des distributions, en l'occurrence des distributions tempérées à valeurs opératorielles ; une difficulté essentielle et même irréductible [Sch98] est donc de donner un sens à un produit de champs pris au même point, ainsi que cela apparaît couramment dans les calculs. Pratiquement, ce problème se manifeste par l'apparition de divergences dans les quantités que nous essayons d'évaluer. Plus précisément, et plus physiquement aussi, ce phénomène se manifeste en particulier dans l'évaluation de graphes de Feynman comportant des boucles. Cette divergence est alors la trace d'un phénomène profond : dans n'importe quel processus, il faut prendre en compte des contributions de physique à toutes les échelles de distance ; ces contributions sont essentiellement du même ordre de grandeur, si bien qu'aucune ne peut être négligée devant les autres. Ainsi, contrairement à notre intuition macroscopique, qui par exemple nous permet de concevoir comme légitime le succès de la mécanique du point pour décrire le mouvement des planètes (le diamètre d'une planète est certainement négligeable devant le rayon moyen de son orbite autour du soleil), les théories locales d'un champ continu portent en elles cette spécificité déroutante. Notons que la description mathématique des champs montre bien que ce caractère est intrinsèque, et non pas un artefact de la théorie des perturbations.

La démarche préconisée est alors la suivante : nous introduisons dans notre problème une nouvelle échelle dimensionnée  $\Lambda$  homogène à une énergie, un *régulateur*, qui formellement fait de nos distributions des fonctions<sup>1</sup> ; les produits de champs considérés deviennent réguliers, et les éléments de matrices des opérateurs de la théorie dépendent maintenant des paramètres scalaires  $g$  et  $m_q$  du Lagrangien et du régulateur introduit  $\Lambda$ . Avant de repasser à la limite de régulateur infini, qui sera une manière de définir les opérateurs locaux de la théorie non régularisée, nous absorbons le régulateur dans une redéfinition des paramètres scalaires. Ainsi, au lieu d'avoir des fonctions singulières des paramètres  $g$  et  $m_q$  du Lagrangien  $\mathcal{L}$ , nous obtenons des fonctions régulières des paramètres  $g(\Lambda)$  et  $m_q(\Lambda)$  singuliers dans leur dépendance en le régulateur  $\Lambda$ . Nous sommes à même d'écrire un Lagrangien  $\mathcal{L}_\Lambda$ , dit *nu*, dépourvu de toute singularité à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  hors des paramètres scalaires  $g(\Lambda)$  et  $m_q(\Lambda)$ . Cette démarche d'introduction d'un régulateur  $\Lambda$  porte le nom de *régularisation*, et la redéfinition des paramètres  $g(\Lambda)$ ,  $m_q(\Lambda)$  et le passage à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  celui de *renormalisation*. La QCD sur réseau est l'unique méthode connue jusqu'à présent pour renormaliser *non-perturbativement* la théorie en

---

1. Nous choisissons ici  $\Lambda$  tel que la théorie non régularisée corresponde à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .



s'appuyant uniquement sur ses premiers principes. Pour cette raison, nous insisterons davantage sur la renormalisation de la QCD dans la SEC. I.3.

### I.2.1 Démarche naïve

Insistons sur le fait que l'approche "réseau" des théories de champ part quasi-systématiquement de la formulation de la théorie en termes d'intégrales de chemin. Cette approche, qui est l'approche moderne des théories quantiques de champ, offre l'avantage d'une part d'être toujours très proche des premiers principes, notamment en ce qui concerne les différentes symétries mises en jeu, et d'autre part d'apporter de manière rapide et efficace de nombreux résultats importants et d'usage fréquent.

Une manière simple de régulariser une théorie de champ consiste à la poser sur un réseau. Nous discrétisons l'espace-temps en un maillage  $N^3 \times T$  de  $N$  sites sur chaque direction spatiale et  $T$  sites sur la direction temporelle. Le régulateur naturellement considéré ici est la maille  $a$  du réseau<sup>2</sup>. La théorie non régularisée est retrouvée en deux étapes : d'abord prendre la limite  $N \rightarrow \infty$  et  $T \rightarrow \infty$  de volume infini, puis la limite  $a \rightarrow 0$  du continu.

#### Volume fini et conditions de bord

Même si nous décrivons une théorie sur un volume fini, nous voulons conserver un certain nombre de propriétés essentielles, dont, dans le cas présent, l'invariance par translation. Ceci signifie que nous ne pouvons nous permettre que des déphasages des champs comme condition de bord.

La solution la plus simple consiste alors à prendre des conditions aux limites périodiques pour les champs. D'autres choix peuvent être adoptés, comme par exemple des conditions anti-périodiques pour les champs fermioniques. Ceci revient à imposer la périodicité (et l'invariance par translation) sur l'ensemble de deux copies adjacentes du réseau considéré.

Notons que des conditions de bord autres que périodiques sont utilisées pour créer un champ de fond, par exemple pour étudier sur réseau des propriétés topologiques de théories de champ. C'est encore le choix fait par la Collaboration ALPHA pour le calcul de  $\alpha_s$  par la méthode de la fonctionnelle de Schrödinger, qui exploite la finitude de la direction temporelle [Som97].

---

2. On supposera ici le réseau isotrope, i.e. la maille est la même dans les directions de temps et d'espace. Ceci n'est pas toujours le cas, en particulier dans l'étude de la QCD à température finie [Kar01].

## I.2. RÉGULARISATION ET ANOMALIE CHIRALE

### Prolongement analytique et fonctions de corrélations

Toutes les quantités calculables dans ce cadre régularisé sont alors finies, à ceci près qu'il faut encore auparavant formuler la théorie non pas sur l'espace de Minkowski  $M^4$ , mais sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^4$ . La motivation pour ce dernier point est double :

- Cette procédure supprime les pôles des intégrales calculées, par exemple en faisant du propagateur minkowskien  $\frac{1}{p^2-m^2}$  le propagateur euclidien  $\frac{1}{p^2+m^2}$ . Ceci adoucit le comportement infra-rouge des intégrales calculées numériquement.
- Les objets basiques de la théorie, les fonctions de Green, font intervenir des intégrales du type  $\int [dA_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}$  qui sont très oscillantes, et par conséquent d'évaluation numérique délicate. La formulation euclidienne transforme ces intégrales en  $\int [dA_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] e^{-S(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}$ , où l'action  $S$  est positive. C'est ce point essentiel qui donne accès au calcul par des méthodes statistiques.

L'hypothèse sous-jacente à cette manipulation est raisonnable : les champs doivent dépendre analytiquement des coordonnées d'espace-temps. L'axiomatique de Wightman [SW64] impose d'ailleurs le prolongement analytique des fonctions de corrélations d'opérateurs locaux de l'espace de Minkowski vers l'espace euclidien à quatre dimensions. Réciproquement, le théorème d'Osterwalder - Schrader [GJ81] stipule que les fonctions de corrélations euclidiennes peuvent être analytiquement prolongées vers l'espace de Minkowski, pour peu que l'action vérifie une condition dite de *positivité d'Osterwalder - Schrader* (“*reflection positivity*”). Ceci est en effet le cas pour les diverses actions employées dans les simulations en QCD sur réseau, dont en particulier l'action de Wilson que nous décrirons SEC. I.2.3.

Dans la pratique, les choses ne sont cependant pas aussi simples ; une simulation sur réseau n'offre qu'un certain nombre de points “expérimentaux”, et le plus souvent le prolongement analytique peut se faire d'une infinité de manières. La situation peut même devenir très délicate lorsque l'interaction produit plusieurs états finaux : par exemple, dans le cas du couplage d'une densité scalaire à deux champs interpolant une particule pseudoscalaire, Maiani et Testa [MT90] montrent explicitement que la fonction de corrélation euclidienne à trois points de ces objets a un comportement asymptotique dépendant de la définition particulière du champ interpolant. En particulier, leur démonstration révèle que s'il existe un état donné sous le seuil de production de deux particules, la contribution non-physique peut en principe être extraite, bien que cela puisse s'avérer impossible en pratique. Ce problème est aigu dans l'univers actuel de la QCD sur réseau, où les masses des quarks sont suffisamment lourdes pour placer la masse du méson  $\rho$  sous le seuil  $\pi\pi$ .

## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

Des tentatives astucieuses de tirer parti des effets de volume fini [LL00] ont permis de contourner ce théorème “de No-Go”. En effet, le résultat de Maiani et Testa est valable dans la limite de réseau très grand voire infini, où le spectre des états finaux est continu. Ceci n’est assurément pas le cas en volume fini, où au contraire les niveaux d’énergie sont discrets. En particulier, en fonction de la taille du réseau, seuls certains états seront accessibles en tant que voies de désintégration. Dans un tel cas de figure, Lellouch et Lüscher donnent une formule simple reliant l’amplitude de transition en volume fini au taux de désintégration en volume infini.

Ce problème de continuation analytique demeure cependant bien réel. La proposition de Lellouch et Lüscher repose crucialement sur le caractère unitaire de la théorie de champ décrivant la collision ; or la formulation de la QCD sans recours aux fermions dynamiques n’est pas unitaire, alors qu’il s’agissait jusqu’à récemment de l’approximation privilégiée de la communauté mondiale de QCD sur réseau. De plus, elle est encore utilisée pour mener des travaux à caractère exploratoire. Cet argument sera détaillé dans la SEC. I.3. Dans la mesure du possible, nous essaierons donc d’extraire les informations physiques directement à partir des fonctions de corrélations euclidiennes.

Toutefois, les cas qui nous préoccupent dans le cadre de cet exposé ont au plus un état. Dans ce contexte nettement plus favorable, le retour de la simulation euclidienne vers la théorie minkowskienne consiste simplement à remplacer la coordonnée temporelle (euclidienne)  $t$  par son homologue (minkowskienne)  $it$ , et donc une décroissance exponentielle  $e^{-Et}$  par un terme de phase  $e^{-iEt}$ .

### Lien avec la théorie statistique du champ

Nous obtenons alors un cadre conceptuel où temps et espace n’ont plus aucune différence, et dans lequel la QCD est traitée comme une théorie de champ classique à 4 dimensions d’espace en équilibre thermodynamique (dont la température est essentiellement l’inverse de la constante de couplage nue).

La question initiale de physique des particules est maintenant devenue un problème de physique statistique, que nous pouvons traiter avec les méthodes usuelles de cette discipline, et en particulier les algorithmes numériques. Les évaluations numériques de QCD sur réseau reposent crucialement sur les méthodes de Metropolis [MRT53], variantes des méthodes de Monte Carlo particulièrement adaptées au type de situation qui nous intéresse. Citons deux raisons à cela.

Tout d’abord, la description de la QCD sur un réseau place les champs de jauge sur les liens de ce réseau, et les champs de matière sur ses sites. La

## 1.2. RÉGULARISATION ET ANOMALIE CHIRALE

fonction de partition :

$$Z[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left( - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}(A, \psi, \bar{\psi}) + A_\mu^a J^{a\mu} + \bar{\psi} \sigma + \bar{\sigma} \psi \right) \quad (\text{I.6})$$

du système thermodynamique est alors mathématiquement bien définie, en tant qu'intégrale sur un nombre *fini mais élevé* de variables d'intégrations. Or, les techniques usuelles d'évaluation des intégrales par quadrature commencent à devenir réellement inefficaces dès que la dimension de l'espace d'intégration atteint une valeur de 4 à 8... Pour fixer les idées, les simulations typiques faites sur les APE d'Orsay concernent des réseaux  $24^4$  de l'action "pure jauge", i.e. sans quark ; un champ de jauge  $A_\mu$  est en fait une matrice  $3 \times 3$   $A_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$  de nombres complexes. Par suite, une observable dépend de  $\simeq 24^4 \times 3 \times 3 \times 2 \simeq 6 \cdot 10^6$  degrés de liberté sur lesquels intégrer.

Par ailleurs, toute observable  $\mathcal{O}(f)$  est obtenue par évaluation d'une intégrale de type  $\int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] f(A, \psi, \bar{\psi}) \exp \left( - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}(A, \psi, \bar{\psi}) \right)$  ; plus précisément, toutes les intégrales gardent le même facteur exponentiel, mais dépendent d'une fonction  $f$  différente. L'algorithme de Metropolis prend en compte cette spécificité, en faisant de :

$$d\mu[A, \psi, \bar{\psi}] = \exp \left( - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}(A, \psi, \bar{\psi}) \right) [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \quad (\text{I.7})$$

une mesure de probabilité. Le principe du calcul consiste alors à tirer aléatoirement une suite  $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$  de points<sup>3</sup> répartis suivant la loi de probabilité  $d\mu$  afin d'évaluer  $\mathcal{O}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$ .

Ainsi, bien que les méthodes de Metropolis soient à convergence lente (elles convergent en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  où  $N$  est le nombre de points échantillonnés), elles sont les moins mauvaises méthodes connues à l'heure actuelle pour traiter ce type de problèmes [Sok96].

Il reste à finaliser les choses d'un point de vue opératoire. Nous voulons typiquement placer des hadrons ( $\pi, \rho, \dots$ ) dans une boîte ; encore faut-il que ladite boîte soit d'une dimension très grande<sup>4</sup> devant une échelle caractéristique de la particule (diamètre, longueur de compton  $\frac{\hbar}{mc}, \dots$ ), et que cette particule ne ressente pas non plus la discrétisation de l'espace-temps. La finitude des mémoires des calculateurs sur lesquels nous travaillons impose donc le recours à un compromis de volume pas trop grand, et de maille pas trop petite. En conséquence de ceci, par exemple, le traitement de problèmes physiques avec

---

3.  $x_i$  désigne génériquement une configuration de champs  $A_\mu, \psi$  et  $\bar{\psi}$  vivant sur le réseau.

4. Cet argument est plus subtil concernant des méthodes telles que la fonctionnelle de Schrödinger.

un quark  $b$  autre que statique est inaccessible à la génération présente de calculateurs<sup>5</sup>.

Soulignons enfin une difficulté pratique : nous travaillons sur réseau uniquement à partir des premiers principes, ce qui est tout l'intérêt de la méthode. Ceci signifie que les seuls paramètres qui déterminent une simulation doivent apparaître dans le Lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  régularisé, i.e. il ne peut s'agir que de la constante de couplage nue  $g_0$  et des masses des quarks nues  $m_0$ . Le cadre formel étant directement régularisé, ces quantités dépendent en fait de la maille  $a$ , *qui est a priori inconnue*. Par ailleurs, dans ce travail d'écriture d'un Lagrangien effectif intégré sur les fluctuations quantiques de petite distance, nous pouvons légitimement supposer que les paramètres régularisés du Lagrangien ne dépendent pas du régulateur infra-rouge, ici le volume ou la masse des quarks pris comme sources. Ainsi, nous pouvons considérer que la maille du réseau  $a$  est complètement fixée par la donnée de la constante de couplage nue  $g_0$  ou la masse dynamique des quarks dès que les différentes échelles physiques du problème sont suffisamment séparées, ou, dit autrement, que le réseau est assez grand et assez finement discrétisé pour contrôler les effets infra-rouge et ultra-violet.

### I.2.2 Le théorème “de No-Go” de Nielsen et Ninomiya

Considérons pour simplifier une théorie de champ (libre) définie par le Lagrangien  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi$  [Cre83]. Soit  $x$  un site du réseau, et  $x \pm a\hat{\mu}$  ses voisins dans les 4 directions d'espace-temps<sup>6</sup>. Une manière naturelle de définir la dérivée d'un champ fermionique  $\psi(x)$  au site  $x$  dans la direction  $\hat{\mu}$  est :

$$\partial_\mu \psi(x) = \frac{1}{2a}(\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x - a\hat{\mu})) \quad (\text{I.8})$$

L'action discrétisée s'écrit  $S = \sum_{x,y} \bar{\psi}_x D_{xy} \psi_y$  avec  $D$  l'opérateur de Dirac massif discrétisé :

$$D_{xy} = \frac{1}{2}a^3 \sum_\mu \gamma_\mu (\delta_{x+a\hat{\mu},t} - \delta_{x-a\hat{\mu},t}) + a^4 m \delta_{xy} \quad (\text{I.9})$$

La transformée de Fourier de  $D$  est :

$$\tilde{D}(p) = m + ia^{-1} \sum_\mu \gamma_\mu \sin(ap_\mu) \quad \text{avec} \quad p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{N} a^{-1} \quad \text{et} \quad 0 \leq n_\mu < N \quad (\text{I.10})$$

---

5. Pour fixer les idées, une simulation “quenched” réaliste avec un  $b$  non statique nécessiterait un réseau  $100^3 \times 200$ . Ce type de problème est du ressort de la prochaine génération de calculateurs tels que APENEXT.

6. Nous notons  $\hat{\mu}$  le vecteur orienté d'origine  $x$ , de norme  $a$  et d'orientation celle de l'axe portant la coordonnée  $\mu$ .

## I.2. RÉGULARISATION ET ANOMALIE CHIRALE

Une fonction  $f(x)$  vivant sur les sites du réseau admet une décomposition spectrale :

$$f(x) = \frac{1}{N^4} \sum_n \tilde{f}(p) e^{-\frac{2i\pi}{N} n_\mu x_\mu} = \frac{1}{N^4} \sum_p \tilde{f}(p) e^{-ip_\mu x_\mu} \quad (\text{I.11})$$

avec

$$\tilde{f}(p) = \sum_x f(x) e^{ip_\mu x_\mu} \quad (\text{I.12})$$

A la limite de volume infini, les sommes sur les impulsions  $\sum_p$  deviennent des intégrales  $\int_{-\pi/a}^{+\pi/a} dp$  sur la région  $[-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a}]^4$  appelée *zone de Brillouin* par analogie avec la physique du solide.

Dans cette limite, une boucle fermionique sur réseau s'écrit :

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} dp_\mu \tilde{D}(p)^{-1} = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^{+\frac{\pi}{2a}} (dp_\mu + dp'_\mu) \tilde{D}(p)^{-1} \quad (\text{I.13})$$

où nous notons  $p'_\mu = p_\mu - \pi/a$ . Concrètement, ce résultat, issu d'un simple changement de variable, signifie que le propagateur d'un fermion sur réseau se comporte de la même manière au voisinage du point  $(0,0,0,0)$  qu'au voisinage de tout point ayant ses composantes valant 0 ou  $\pi/a$ . Le champ fermionique oscille donc violemment entre sites voisins à l'intérieur de la zone de Brillouin, rendant délicate la limite du continu. Plus précisément enfin, ce calcul peut s'interpréter en disant qu'il existe en chaque point  $x + \eta\pi/a$  (où  $\eta_\mu \in \{0,1\}$ ) une réplique du champ fermionique, se comportant comme le champ fermionique en  $x$ ; ces répliques peuvent être produites par paires à partir du champ originel désiré.

Ce résultat est en fait beaucoup plus général, et s'étend au-delà du cas simple avec lequel nous venons de l'illustrer : il s'agit du théorème “de No-Go” de Nielsen et Ninomiya [NN81a], [NN81b] qui stipule qu'il est impossible, sous des hypothèses raisonnables, de régulariser sur réseau un champ fermionique sans briser la symétrie chirale, que nous discuterons SEC. III.1.1 et SEC. III.1.2. Une telle liste d'hypothèses<sup>7</sup> peut être :

- (i) La transformée de Fourier  $\tilde{D}(p)$  de l'opérateur de Dirac est analytique et  $\frac{2\pi}{a}$ -périodique.
- (ii)  $\tilde{D}(p) = i\gamma_\mu p_\mu + \mathcal{O}(ap^2)$  pour  $p \ll \pi/a$ .
- (iii)  $\tilde{D}(p)$  est inversible dès que  $p_\mu \neq 0$  modulo  $\frac{2\pi}{a}$ .
- (iv)  $\{D, \gamma_5\} = 0$ .

---

7. Pour simplifier, nous décrivons le cas d'un quark de masse nulle.

L'hypothèse (i) signifie que l'opérateur de Dirac décroît au moins exponentiellement entre points différents du réseau ; c'est une hypothèse de localité. (ii) et (iii) exigent que la théorie discrétisée possède la bonne limite du continu, en particulier sans réplique. Enfin, (iv) est la condition d'invariance sous les transformations chirales continues.

L'origine de ce résultat est profondément ancrée dans le problème de l'anomalie chirale. Adler [Adl69], Bell et Jackiw [BJ69] ont montré qu'il était impossible d'assurer *simultanément* l'absence d'anomalie pour les courants axial et vectoriel auquel cas nous retenons donc l'anomalie axiale afin de préserver l'invariance de jauge. Ainsi que nous le verrons dans la SEC. III.1.1, Fujikawa [Fuj79] a ensuite exhibé la nature de ce problème en utilisant une régularisation invariante de jauge : la présence de l'anomalie est liée à la non-invariance de la mesure d'intégration de l'intégrale fonctionnelle sous les transformations chirales. Le problème sur le réseau est donc le suivant. Nous disposons naturellement d'une régularisation de la QCD qui respecte l'invariance de jauge ; en effet, le nombre de degrés de liberté de l'intégrale de chemin régularisée est fini, et le terme intégré ainsi que la mesure d'intégration sont invariants de jauge. Par ailleurs, l'anomalie axiale est absente bien que l'opérateur de Dirac vérifie les conditions "raisonnables" (i), (ii) et (iv) précédentes. L'annulation de l'anomalie se fait au prix du rejet de la  $\frac{2\pi}{a}$ -périodicité invoquée dans la condition (iii), ainsi que le montre (I.10). Ceci se traduit par l'apparition de fermions supplémentaires, dont sept ont la même charge axiale que le fermion initialement présent, et huit la charge axiale opposée [KS81]. Par conséquent, si nous ne voulons simuler qu'un quark sur le réseau, ou si nous désirons la présence d'une anomalie axiale, une solution possible consiste à *briser explicitement* la symétrie chirale.

### I.2.3 Solutions proposées

Ce théorème a été formulé de manière précise en essayant de décrire l'interaction faible sur réseau, situation où surgit la difficulté du traitement du neutrino gauche. Cependant, le problème des répliques était connu depuis plus longtemps, et constituait déjà un obstacle à la discrétisation des champs fermioniques.

Une première solution a été proposée par Wilson dès 1975 [Wil75]. Elle brise explicitement la symétrie chirale en rajoutant au terme de masse une contribution dépendant de l'impulsion. C'est l'action que nous avons utilisée pour accomplir le travail présenté dans cet exposé. Nous la décrirons plus en détails à la fin de cette section.

Une autre formulation est celle de Kogut et Susskind ("staggered fermions") [KS75]. L'idée est ici d'interpréter les répliques fermioniques comme

## 1.2. RÉGULARISATION ET ANOMALIE CHIRALE

de nouvelles saveurs ; il est alors possible de réduire le nombre de répliques de 16 à 4. Par ailleurs, il subsiste une symétrie chirale  $U(1) \times U(1)$  dans la limite de masse nulle. Cependant, à maille finie, les interactions de jauge brisent la symétrie de saveur, si bien qu'il se produit un mélange de spins et de saveurs des 16 degrés de libertés. Ceci complique la construction et l'analyse des opérateurs sur réseau.

Plus récemment, deux régularisations offrant un bon comportement chirale ont été proposées : les “*overlap fermions*” [Neu98a], [Neu98b] et les “*domain wall fermions*” [Kap92]. Les deux démarches reposent sur un assouplissement de la condition (iv) du théorème de Nielsen et Ninomiya en  $\gamma_5 D + D \gamma_5 =$  quelque chose de local. Nous écrivons  $\{\gamma_5, D\} = a D \gamma_5 D$  pour les “*overlap fermions*”, et  $\{\gamma_5, D\} = d(p^2) D \gamma_5 D$  pour les “*domain wall fermions*”, où  $d(p^2)$  est une fonction locale. Dans les deux cas, la symétrie chirale est brisée de manière plus douce sur réseau. Notons enfin que les “*domain wall fermions*” consistent en un plongement d'une théorie à quatre dimension dans un espace à cinq dimensions. Les modes chiraux vivent sur les “*domain walls*” et les modes massifs sur la cinquième dimension. Si nous intégrons les modes massifs, nous retrouvons essentiellement les idées de Ginsparg et Wilson, ce qui montre que, dans une certaine mesure, les “*domain wall fermions*” et les “*overlap fermions*” sont deux aspects de la même chose [Neu98c], [Zin02]. Cependant, même si les premières simulations numériques reposant sur ces actions livrent des résultats prometteurs et intéressants, il faut retenir que le temps de calcul est accru d'un facteur 100 par rapport aux fermions de Wilson [Jan01].

Explicitons à présent l'action de Wilson telle qu'elle apparaît dans la littérature. Nous notons  $\psi^f(x)$  le champ d'un quark de saveur  $f$  sur le site  $x$ . Soit  $U(x, \hat{\mu}) = \exp\left(i g_0 a \frac{1}{2} \lambda_b A_\mu^b(x)\right)$  l'élément du groupe  $SU(3)$  associé au champ de jauge  $A$  ; il vit sur le lien du réseau quittant le site  $x$  dans la direction  $[x, x + a\hat{\mu}]$ . La *plaquette* est le plus court chemin fermé sur réseau :

$$U(p) = U_p(x) \equiv U^\dagger(x, \hat{\nu}) U^\dagger(x + a\hat{\nu}, \hat{\mu}) U(x + a\hat{\mu}, \hat{\nu}) U(x, \hat{\mu}) \quad (\text{I.14})$$

Notant sous la forme  $\beta = \frac{2N}{g_0^2}$  la constante de couplage nue de  $SU(N)$ , la partie “pure jauge” de l'action de Yang-Mills est :

$$S_g[U] = \beta \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re}(\text{Tr} U(p))\right) \quad \text{avec} \quad \sum_p \equiv \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \quad (\text{I.15})$$

La partie fermionique de l'action de Wilson est :

$$S_f[U, \psi, \bar{\psi}] = \sum_{x,f} a^4 \left( \bar{\psi}^f(x) \psi^f(x) - \kappa_f \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\psi}^f(x + a\hat{\mu}) [r + \gamma_\mu] U(x, \hat{\mu}) \psi^f(x) \right) \quad (\text{I.16})$$



où  $\kappa_f = \frac{1}{8r+2am}$  est appelé *paramètre de Wilson*. Nous obtenons l'action de Wilson :

$$S_W[U, \psi, \bar{\psi}] = S_g[U] + S_f[U, \psi, \bar{\psi}] \quad (\text{I.17})$$

Il nous arrivera de commettre l'abus de langage de parler de  $\beta$  en termes de constante de couplage nue et des  $\kappa_f$  en termes de masses des quarks nues.

## I.3 Renormalisation non-perturbative

### I.3.1 Principes généraux et aspects non-perturbatifs

Reprenons maintenant l'action de la QCD régularisée par un paramètre  $\Lambda$  comme celui introduit SEC. I.2, et discutons la situation de manière non-perturbative. Il s'agit à présent de donner un sens à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  des produits de distribution régularisés.

De manière générale, et suivant [Del02], une théorie est dite *renormalisable* si toutes les divergences qui s'y manifestent peuvent être supprimées en imposant autant de conditions (*conditions de renormalisation*) qu'il y a de paramètres indépendants dans la théorie.

Rappelons que le Lagrangien de la QCD (I.1) a été écrit comme Lagrangien d'une théorie de champ locale, renormalisable et possédant la symétrie de jauge  $SU(3)$ . L'idée est donc que les paramètres libres, laissés sans valeur numérique connue par les conditions de symétrie qui ne font qu'imposer la forme du Lagrangien, peuvent être remplacés, pour mener les calculs à bien, par l'ajustement à autant de données expérimentales. Cet argument est fréquemment utilisé en physique, mais n'est en fait trivial que pour les théories linéaires, ce qui n'est assurément pas le cas ici : la non-linéarité traduit l'interaction entre particules. Il est en fait très profond, et traduit quasiment complètement la structure des divergences en le régulateur. Plus précisément, la structure des divergences “maximales” de la théorie est contrôlée par le postulat de renormalisabilité et des arguments d'analyse dimensionnelle ; certaines de ces divergences peuvent disparaître si la théorie est contrainte par des symétries qui vont restreindre les formes possibles des divergences. Par exemple, retenons que la QCD ne connaît à une boucle que des divergences logarithmiques ; les autres termes de la série de perturbation sont typiquement en  $\alpha_S^n(\mu) \log^m \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{\mu}$  où  $\mu$  est le point de renormalisation et  $n, m$  des entiers tels que  $m \leq n$ .

Les théories quantiques de champ s'expriment usuellement en termes de constantes de couplages, de masses et de normalisations des différents champs. La démarche générale de la renormalisation consiste donc d'abord à introduire des *contre-termes* pour tuer les divergences en le régulateur. Si le contre-terme

### 1.3. RENORMALISATION NON-PERTURBATIVE

correspond à un opérateur déjà présent dans le Lagrangien, il peut être absorbé en redéfinissant le facteur multiplicatif de l'opérateur en question, et le Lagrangien garde la même forme générale. Si le contre-terme ne correspond à aucun terme présent initialement, la renormalisation fait apparaître un nouveau terme dans le Lagrangien. Tant que ces termes apparaissent en nombre fini, il est toujours possible d'élargir la définition du Lagrangien de départ en les y rajoutant ; l'ajout de contre-terme ne modifie alors plus la forme du Lagrangien. Si par contre il faut ajouter une infinité de termes supplémentaires, la théorie n'est alors plus renormalisable et ne peut expliquer tous les phénomènes d'interaction forte dans tous les domaines d'énergie. L'excellent accord avec les données expérimentales assure la validité de l'application du postulat de renormalisabilité à la QCD.

La grande difficulté de l'activité de renormalisation consiste alors à identifier les paramètres indépendants de la théorie afin de connaître le nombre de conditions à imposer. Ce point est incontournable dans le cadre des théories de jauge. En effet, une telle théorie reposant sur un principe de symétrie, il est absolument nécessaire que la symétrie de jauge de l'action classique se retrouve dans l'action quantique effective. Les *identités de Ward-Takahashi ou Slavnov-Taylor* manifestent en termes opératoriels la réminiscence de la symétrie au niveau quantique et, formulé de manière opératoire, ces identités imposent des relations entre constantes de renormalisation. Notons qu'obtenir des identités de Slavnov-Taylor est d'autant plus commode que la régularisation préserve l'invariance de jauge, ce qui est le cas de la régularisation du réseau. Plus précisément, le groupe de toutes les transformations de jauge sur réseau est compact, et la mesure d'intégration est bien définie ; la symétrie de jauge est alors toujours présente dans les calculs, ce qui nous dispense de la nécessité d'imposer explicitement les identités de Ward.

La renormalisabilité de la QCD entraîne que les opérateurs de dimension massique inférieure ou égale à quatre ne subissent que des renormalisations finies des opérateurs de dimension (strictement) plus élevée. La présence des opérateurs de dimension massique (strictement) plus grande que quatre n'a donc aucune influence sur le calcul des fonctions de Green renormalisées n'invokant pas ces opérateurs. Cependant, nous pouvons avoir besoin d'opérateurs additionnels, absents du Lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ , ou bien parce qu'ils sont de dimension plus grande que cinq (par exemple pour étudier des effets de l'interaction faible) ou bien parce qu'ils n'ont pas les bonnes symétries (par exemple le carré du champ de jauge). Ces opérateurs apportent de nouvelles divergences, ce qui nécessite encore l'introduction d'un certain nombre de contre-terme. Ceux-ci peuvent s'exprimer comme une somme  $\sum_{O'} Z_{O'}^{-1} O'$  d'opérateurs régularisés  $O'$  nécessaires à la renormalisation des opérateurs de  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  et des termes additionnels. Après renormalisation, les opérateurs sont finis. Un facteur  $Z_O$  s'appelle

## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

*constante de renormalisation*. Il dépend du régulateur  $\Lambda$  et d'une *échelle de renormalisation*  $\mu$ , caractéristique de l'échelle du phénomène physique que nous entendons décrire. L'introduction de cette grandeur dimensionnée supplémentaire est nécessaire car l'opérateur renormalisé ne peut dépendre du régulateur par définition. La *dimension anormale*  $\gamma_O$  d'un opérateur  $O$  dont la constante de renormalisation  $Z_O$  ne dépend que logarithmiquement de l'échelle de renormalisation  $\mu$  est définie par une identité du type  $\gamma_O = \frac{\partial \log Z_O(\mu)}{\partial \log \mu}$  ; il s'agit d'une série en  $\alpha_s$ . Elle décrit l'arbitraire du choix de l'échelle de renormalisation, et donc de la condition de renormalisation. Cet arbitraire est d'autant plus présent qu'il n'y a aucune échelle d'énergie-impulsion qui s'impose dans la QCD, à la différence de la masse de l'électron dans la QED de basse énergie. La masse des quarks n'est pas une observable physique, mais elle est définie de manière tout-à-fait rigoureuse et inambigüe en spécifiant un schéma et une échelle de renormalisation. Malgré cela, il est toutefois usuel et très pratique de renormaliser hors-couche de masse.

A ce stade, il est légitime de se demander si le résultat de cette procédure est bien indépendant du choix du régulateur et de la condition de renormalisation. Nous venons de décrire comment les produits de distributions sont définis au moyen d'une procédure qui transforme les constantes de couplage, les masses et les normalisations des champs en quantités évoluant en fonction de l'échelle de renormalisation. L'algorithme de renormalisation d'une quantité donne uniquement la nature de cette évolution, et non pas sa valeur (numérique) précise. De manière explicite, une constante de couplage (ou une masse, ou une normalisation d'un champ)  $g$  va évoluer, en fonction de l'échelle de renormalisation  $\mu$ , sous la forme  $g(\mu) = g_0 G(\mu)$  où  $G$  est une fonction sans dimension, obtenue à l'issue de la procédure de renormalisation.  $g_0$  est de valeur inconnue, à déduire d'une donnée expérimentale. Une condition de renormalisation standard est  $G(\mu) = 1$  à  $\mu = \mu_0$ , qui revient à dire que  $g(\mu_0) = g_0$ . Le postulat de renormalisation assure alors que la dynamique de la théorie toute entière est fixée par un nombre fini de conditions semblables, ce qui revient de fait à exprimer toutes les quantités calculées en termes des données expérimentales pré-requises, d'où l'indépendance des prédictions de la théorie en le régulateur et la condition de renormalisation.

### I.3.2 De la théorie aux valeurs numériques

Pour fixer les idées, nous régulariserons dans toute la suite l'action de la QCD sur réseau au moyen de l'action de Wilson, et nous considérerons le cas de deux saveurs de quarks de même masse. Ceci ne nuit en rien à la généralité de l'argument, mais permet d'illustrer le propos de manière concrète.

### 1.3. RENORMALISATION NON-PERTURBATIVE

Après cet exposé de principe, comment procéder alors pour obtenir des nombres à confronter à l'expérience? Schématiquement, il y a deux paramètres nus (un couplage, une masse), soit deux contraintes physiques à imposer, comme l'exige le postulat de renormalisabilité. Une simulation sur réseau ne produit que des nombres sans dimension<sup>8</sup>, comme  $am_\pi$  ou  $am_\rho$ . Une fois ces quantités étalonnées par des données expérimentales, tous les autres nombres sont en principe des prédictions de la théorie. Il s'agit donc bel et bien du principe de renormalisation dans sa pleine application. Il apparaît clairement que le fait d'utiliser un ordinateur "en boîte noire" n'induit aucune différence conceptuelle avec d'autres schémas de régularisation / renormalisation : l'approche de Wilson est exacte sur le plan de la démarche physique. Par contre, un énorme avantage par rapport aux schémas utilisés pour les calculs analytiques, comme disons  $\overline{\text{MS}}$ , est que sur réseau, les calculs sont directement non-perturbatifs. Notons donc que la fixation par la masse du  $\rho$  des mailles des réseaux que nous avons utilisés dans le calcul de  $\alpha_S$  présenté dans cet exposé fait de la QCD sur réseau un moyen de calculer  $\alpha_S(M_Z)$  en fonction de l'unique<sup>9</sup> échelle dimensionnée  $m_\rho$ .

Le régulateur du réseau est l'inverse de la maille  $a^{-1}$ . Le calcul d'un opérateur renormalisé s'écrit  $O_R(\mu) = \lim_{a \rightarrow 0} Z_O(a\mu)O_{a^{-1}}$ . Or passer à la limite du continu suppose de pouvoir extrapoler numériquement des données évaluées aux mêmes impulsions  $p = \frac{2\pi}{N}\sqrt{n^2}a^{-1}$  lorsque  $a$  tend vers 0. Ceci sous-entend que nous disposons de données issues de plusieurs réseaux différents, de volumes différents, en ne gardant que les points sur les lignes  $\frac{\sqrt{n^2}}{N}a^{-1} = \text{C}^{\text{te}}$ . C'est évidemment une contrainte sur le volume de données à produire, mais il est possible de s'en affranchir si les mailles avec lesquelles nous travaillons sont suffisamment petites. Typiquement, une simulation "quenched" avec des fermions de Wilson à  $\beta = 6,0$  possède une maille  $a^{-1} = 2 \text{ GeV}$  i.e.  $a = 0,1 \text{ fm}$ , ordre de grandeur des diamètres hadroniques. A ces échelles, il est donc important de veiller aux artefacts de maille finie, certaines observables y étant plus sensibles que d'autres. Dans la pratique, nous considérerons comme opérateur renormalisé  $O_R(\mu)$  l'opérateur  $Z_O(a\mu)O_{a^{-1}}$  ayant encore une dépendance résiduelle (régulière) en  $a$ .

La fonction de partition associée à l'action de Wilson avec  $n_f$  saveurs de

---

8. Cette remarque n'est pas forcément triviale ; c'est au contraire le fait qu'un ordinateur ne connaisse pas les grandeurs dimensionnées qui permet de simuler sur les *mêmes machines* des problèmes très différents, issus par exemple de la physique sub-nucléaire ou de la cosmologie, dans la mesure, bien sûr, où les problèmes considérés sont associés à une unique échelle dimensionnée.

9. L'autre échelle dimensionnée intervenant dans le calcul pour tenir compte de la masse des quarks sert en fait à calibrer les mailles de tous les réseaux utilisés à partir de celle évaluée à l'aide de  $m_\rho$ . Nous verrons ceci en détail dans la SEC. II.3.2.

quarks s'écrit :

$$Z = \int [dU][d\bar{\psi}][d\psi] \exp -(S_g[U] + S_f[U]) \quad (\text{I.18})$$

où nous avons omis les termes sources pour alléger l'écriture. Il est possible d'intégrer sur les champs de quarks pour obtenir un déterminant fermionique :

$$Z = \int [dU] \exp (-S_g[U]) \det M[U]^{n_f} \quad (\text{I.19})$$

A priori  $\det M[U]^{n_f}$  est une quantité complexe, et non réelle, ce qui empêche à première vue le terme intégré d'être considéré comme mesure de probabilité. Rappelons cependant que  $M[U]$  vérifie  $M[U] = \gamma_5 M[U]^\dagger \gamma_5$ , si bien que :

$$\begin{aligned} \det (M[U]M[U]^\dagger) &= \det M[U] \det M[U]^\dagger = \det M[U] \det (\gamma_5 M[U] \gamma_5) \\ &= (\det M[U])^2 \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Ainsi, pour un nombre pair de saveurs de quarks *deux à deux dégénérées*, le signe du déterminant fermionique est parfaitement maîtrisé, et permet le recours aux méthodes de Metropolis. Cette contrainte est certainement sans grande conséquence pour deux saveurs de quarks presque dégénérées ( $m_u \simeq m_d \simeq 5$  MeV), mais beaucoup plus douteuse pour quatre saveurs ( $m_s \simeq 130$  MeV et  $m_c \simeq 1.3$  GeV).

Malheureusement, une fois de plus, des contraintes d'ordre "matériel" surgissent. Les masses de quarks actuellement utilisées dans les simulations de la communauté mondiale placent le  $\rho$  sous le seuil de  $\pi\pi$ , et fait donc de lui une particule stable<sup>10</sup>. De plus, il a été constaté empiriquement que la durée d'une simulation évolue comme  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_q^3}\right)$  [Lip97b] ou  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_q^2}\right)$  [For97b] où  $m_q$  est la masse renormalisée d'un quark sur le réseau. Ceci rend très coûteux les calculs numériques avec quarks dynamiques, i.e. intervenant dans des boucles de diagrammes de Feynman ; ceux-ci sont beaucoup moins longs quand ces quarks sont des fermions de valence, i.e. intervenant comme sources dans l'action. La contrainte est telle qu'il est difficile, à l'heure présente, de travailler numériquement avec deux saveurs dégénérées de quarks de Wilson (légers) de moins de 50 MeV. Ceci étant, les études actuelles ont un statut exploratoire, et le principe de l'approximation  $m_u \simeq m_d$  demeure excellent. L'évolution en puissance des moyens de calcul permettra à terme de travailler sur réseau avec deux saveurs de quarks dynamiques réellement légers, ce qui devrait éclairer un certain nombre de points sur la dynamique chirale de la QCD.

---

10. Des calculateurs de la générations d'APENEXT devraient réaliser  $\frac{m_\pi}{m_\rho} = 0.4$ .

### I.3. RENORMALISATION NON-PERTURBATIVE

Toujours est-il qu'à présent, les simulations avec fermions dynamiques découplent quarks de valence et quarks de la mer, i.e. une saveur de quark est considérée avec deux masses différentes selon qu'un quark de cette saveur apparaît dans une boucle ou en tant que source. Le travail consiste donc à extraire des quantités physiques de simulations non-physiques [Sha00] à l'aide des théories de perturbations chirales, si tant est que les masses des quarks soient suffisamment légères pour rentrer dans leur régime d'applicabilité. Ainsi que nous pouvons le voir FIG. I.1, les quarks dynamiques légers vivant sur le réseau sont encore plutôt lourds, parfois aussi lourds que le quark étrange.

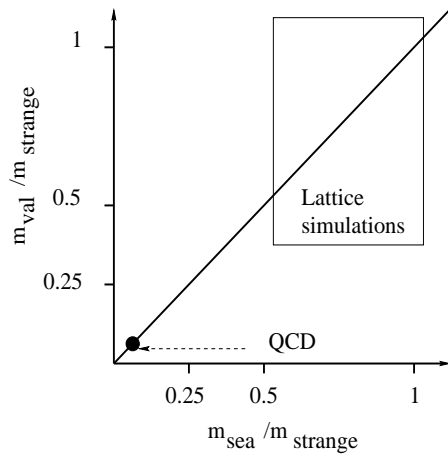
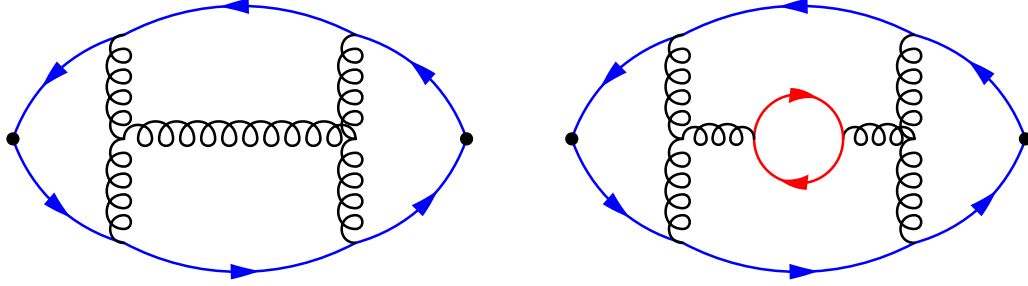


FIG. I.1 –: *Masses de valence et de la mer dans les simulations actuelles. Figure extraite de [Sha00].*

La formule (I.20) explique en partie le coût exorbitant des simulations avec quarks dynamiques : à chaque itération de l'algorithme de Monte-Carlo, il faut évaluer  $\det M[U]$  et inverser l'opérateur *non diagonal*  $M[U]$ . Cette étape est en fait tellement coûteuse que la communauté recourt fréquemment à l'*approximation "quenched"* qui consiste à considérer le déterminant fermionique comme une constante, et par-là même à négliger les contributions des boucles de quarks. Il est admis que l'erreur systématique inhérente à cette approximation est en général de l'ordre au plus de 15 %. Les fermions n'apparaissent alors plus qu'en termes de sources, comme par exemple dans TAB. I.1.

L'approximation "quenched" va modifier la relation entre la maille  $a$  du réseau, et la constante nue  $\beta$ . Pour une même maille  $a$  donnée, la renormalisation supplémentaire induite par les boucles de quarks va changer la valeur de la constante de couplage associée. Ainsi, une maille  $a^{-1}$  de 2 GeV, soit 0,1 fm, correspond dans l'approximation "quenched" à  $\beta = 6.0$  et à  $\beta = 5.6$



TAB. I.1 –: Calcul “quenched” (gauche) et calcul “unquenched” (droite).

et  $\kappa_{\text{mer}} = 0,1560$  avec deux saveurs de quarks dégénérées. Par ailleurs, les équations du groupe de renormalisation assurent, via la propriété de liberté asymptotique, que la maille est d’autant plus petite que  $\beta$  est grand. Ces équations disent davantage : la limite du continu est une limite de couplage faible.

Enfin, les calculs analytiques auxquels confronter les données sont en général menés dans des schémas de renormalisation de type “Momentum Subtraction”, ou encore génériquement MOM. Ces schémas sont indépendants du régulateur introduit, et sont par conséquent particulièrement adaptés aux calculs sur réseau [Mar94]. Nous pouvons ensuite transcrire les quantités évaluées dans les schémas de renormalisation classiques, par exemple  $\overline{\text{MS}}$ , à l’aide de formules (perturbatives) du continu. Ainsi que nous l’avons mentionné SEC. I.3, nous prendrons des conditions de renormalisation hors-couche.

## I.4 Fixation de jauge

Insistons sur le fait qu’en QCD sur réseau, il n’est nécessaire de fixer la jauge que pour calculer des grandeurs dépendant de la jauge, telles que les fonctions de Green. Cependant, une observable indépendante de jauge, peut, elle, être évaluée directement sans fixation de jauge.

Le terme cinétique associé au champ de jauge n’étant pas inversible, il n’est pas possible d’associer une dynamique à celui-ci, si bien qu’il devient nécessaire d’éliminer un degré de liberté (arbitrairement, en vertu du principe d’invariance de jauge) en *fixant la jauge*. Le problème de la fixation de jauge est subtil, et les difficultés qu’il induit ne sont pas encore toutes traitées de manière convenable [Baa97]. Un argumentaire complet sur la fixation de la jauge et le problème des copies de Gribov dépasse de loin le cadre de cet exposé, mais, sachant que nos calculs sur réseau sont effectués en jauge de Landau, il est bon d’avoir une idée des effets systématiques que cela peut induire.

## I.4. FIXATION DE JAUGE

### I.4.1 Difficultés théoriques

#### Démarche perturbative usuelle

La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green est :

$$Z[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{QCD}} + A_\mu^a J^{a\mu} + \bar{\psi} \sigma + \bar{\sigma} \psi) \right) \quad (\text{I.21})$$

Spécifions la condition de jauge de Landau  $\partial^\mu A_\mu^a = 0$ , et prenons un certain  $A_\mu^a$  vérifiant cette contrainte. Rendons explicite la dépendance en le groupe de jauge des éléments de l'orbite du  $A_\mu^a$  considéré en désignant par  $A_\mu^{(g)a}$  le translaté de  $g \in SU(3)$  de  $A_\mu^a$  le long de l'orbite de jauge, et notons aussi  $\Delta_{\text{FP}}[A_\mu^a]$  la fonctionnelle définie par :

$$\Delta_{\text{FP}}[A_\mu^a] \int [dg] \delta(\partial^\mu A_\mu^{(g)a}) = 1 \quad (\text{I.22})$$

$\Delta_{\text{FP}}[A_\mu^a]$  est le *déterminant de Faddeev-Popov* ; il est invariant de jauge, i.e. ne dépend que de l'orbite de  $A_\mu^a$ .

Effectuons le changement de variables consistant à intégrer sur  $\partial^\mu A_\mu^a$  plutôt que sur  $g$ ; la “jacobienne” s’écrit :

$$M_{\text{FP}} = \frac{\delta(\partial^\mu A_\mu^{(g)a})}{\delta g} = \partial^\mu D_\mu \quad (\text{I.23})$$

en vertu de (I.4). Ainsi :

$$\Delta_{\text{FP}}[A_\mu^a] = \det M_{\text{FP}}[A_\mu^a] \quad (\text{I.24})$$

Nous pouvons alors écrire la fonctionnelle génératrice<sup>11</sup> :

$$Z = \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \det M_{\text{FP}}[A_\mu^a] \int [dg] \delta(\partial_\mu A_\mu^{(g)a}) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} \right) \quad (\text{I.25})$$

Ramenons alors  $A_\mu^{(g)a}$  en  $A_\mu^a$  par une transformation de jauge. Comme  $\det M_{\text{FP}}$  ne dépend que de l'orbite de jauge, et que l'action et la mesure d'intégration sont invariantes de jauge, nous obtenons :

$$Z = \int [dg] \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \det M_{\text{FP}}[A_\mu^a] \delta(\partial_\mu A_\mu^a) \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} \right) \quad (\text{I.26})$$

A ce stade, il est possible d'oublier le terme de volume  $\int [dg]$  qui contribue ici comme une “constante infinie” car le terme intégré ne dépend que de l'orbite

---

11. Pour alléger l'écriture des expressions suivantes, nous omettons les termes sources.



## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

de jauge, et pas d'un élément spécifique de cette orbite. Faisons passer le terme "de contact" dans l'exponentielle :

$$Z = \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \det M_{\text{FP}}[A_\mu^a] \exp \left( i \int d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\alpha} \right) \right) \quad (\text{I.27})$$

la jauge de Landau correspondant à la limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

Nous achevons cette procédure standard en introduisant les *fantômes de Faddeev-Popov* dans la fonctionnelle génératrice :

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}, \sigma, \bar{\sigma}] = & \int [dA][dc][d\bar{c}][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left( \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{FP}} + AJ \right. \\ & \left. + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi + \bar{c}\eta + c\bar{\eta}) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

où nous notons :

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\alpha} + (\partial^\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b \quad (\text{I.29})$$

### Implémentation non-perturbative

De manière générale, une condition de jauge  $F[A] = 0$  définit une hypersurface de l'ensemble des configurations de jauge. Fixer la jauge revient à chercher "le" point de l'orbite de jauge rencontrant cette surface. S'il y a plus d'un point, nous rencontrons le problème de l'ambiguïté de Gribov : chacun des points d'intersection porte alors le nom de *copie de Gribov*. Ce problème a été relevé par Gribov en 1978 [Gri78] notamment pour la jauge de Landau.

Dans le cas de présence de copies de Gribov, la démarche perturbative devient caduque. En effet, notant  $g_\alpha$  les différentes solutions, le déterminant de Faddeev-Popov s'exprime en fonction de la somme sur les copies :

$$\Delta_{\text{FP}}^{-1}[A_\mu^a] = \sum_\alpha \frac{1}{\left| \det \frac{\delta(\partial_\mu A_\mu^a(x))}{\delta g} \right|_{g=g_\alpha}} \quad (\text{I.30})$$

mais ceci rend beaucoup plus délicat la procédure de fixation de la jauge, notamment parce que nous ne savons rien sur l'ensemble indexant cette somme. Il est donc nécessaire d'aller au-delà de la théorie de perturbations.

Tout d'abord, remarquons que, dans l'expression de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green de QCD, le déterminant de Faddeev-Popov sert à exprimer la mesure d'intégration fonctionnelle induite sur l'hypersurface de fixation de la jauge. Interprété en termes statistiques, ceci revient à dire que

#### I.4. FIXATION DE JAUGE

le déterminant  $\det M_{\text{FP}}[A_\mu^a]$  sert à exprimer la mesure de probabilité régissant la distribution des configurations à jauge fixée (donnée).

La fixation de jauge sur réseau procède alors de manière inverse : les champs sont tout d'abord échantillonnés avec la distribution statistique sans contrainte de jauge, puis chaque champ est déplacé le long de son orbite de jauge jusqu'à atteindre le point d'intersection avec l'hypersurface de fixation de la jauge. Une observable dépendante de jauge est alors obtenue par la moyenne sur les valeurs qu'elle prend en chacune des configurations évaluées non plus aux valeurs initiales du champ, mais aux points de fixation de jauge. De ce point de vue-là, il est inutile d'introduire sur réseau les fantômes de Faddeev-Popov<sup>12</sup>.

Cela ne supprime pas pour autant l'ambiguïté de Gribov : il est probable que l'orbite de jauge recoupe l'hypersurface de fixation de jauge plusieurs fois.

De manière non-perturbative, nous fixons la jauge de Landau en minimisant la fonction :

$$F_A(g) = -\text{Tr} \int d^4x A_\mu^{a(g)}(x) A_\mu^{a(g)}(x) \quad (\text{I.31})$$

En effet, écrivant  $g(x) = \exp X(x)$  un élément du groupe de jauge, un développement de  $F_A(g)$  autour d'un minimum  $A_\mu^{a(g_0)}(x)$  s'exprime :

$$\begin{aligned} F_A(g) &= F_A(g_0) + 2 \int d^4x \text{Tr} \left( X \partial_\mu A_\mu^{a(g_0)}(x) \right) \\ &\quad + \int d^4x \text{Tr} \left( X^\dagger \text{FP} \left( A_\mu^{a(g_0)}(x) \right) X \right) + \mathcal{O}(X^3) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

où nous notons  $\text{FP}(A) = -\partial_\mu D_\mu(A)$  l'opérateur de Faddeev-Popov. Ainsi la contrainte de minimisation signifie que  $\partial_\mu A_\mu = 0$  et que  $\text{FP}(A)$  est un opérateur positif.

L'ensemble des configurations de champ de jauge  $A_\mu^a$  vérifiant ces deux conditions porte le nom de *région de Gribov*  $\Omega$  pour la jauge considérée ; cette région est bornée [Zwa82]. La linéarité de l'opérateur de Faddeev-Popov assure que cet ensemble est convexe. Sa frontière  $\partial\Omega$  s'appelle *horizon de Gribov* ; elle annule la plus petite valeur propre de l'opérateur de Faddeev-Popov. La région  $\Lambda$  des minima globaux de  $F_A$  est nommée *région fondamentale modulaire*. Elle est incluse dans  $\Omega$ , et de ce fait bornée elle aussi. Ces régions sont représentées sur la FIG. I.2. Zwanziger et dell'Antonio [AZ91] (et auparavant Semenov-Tyan-Shanskii et Franke [SF82]) ont montré que toutes les orbites de jauge rencontrent  $\Omega$ . Ceci se comprend bien sur réseau : les variables qui

---

12. Ceci ne veut pas dire pour autant qu'il est impossible d'étudier sur réseau le comportement, par exemple, du propagateur du fantôme ; celui-ci est donné par l'inverse de l'opérateur (non- local) de Faddeev-Popov.

caractérisent une configuration prennent leurs valeurs sur un compact, si bien que le minimum de  $F_A$  existe et est toujours atteint en au moins un point.

Nous utiliserons ces définitions et résultats dans la SEC. I.4.2 suivante, puis lors des SEC. I.5.3, SEC. II.4.2 et SEC. III.1.3. Il est cependant intéressant de les exploiter dès maintenant pour comprendre comment se manifeste le problème des copies de Gribov de manière générique.

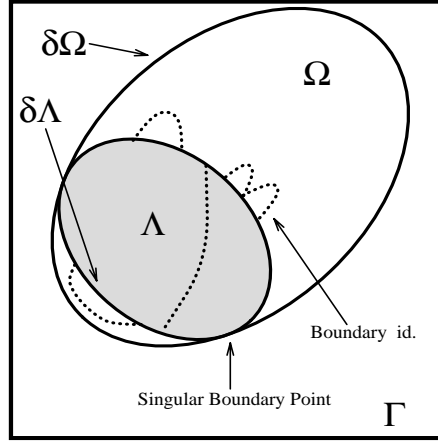


FIG. I.2 –: *Région de Gribov et région fondamentale modulaire. Les lignes en pointillés rejoignent des points d’une même orbite de jauge, et montrent la topologie non-triviale de  $\Gamma$ , ensemble des champs de jauge transverses. Figure extraite de [SBZ02].*

La solution  $A = 0$  est à l’intérieur de  $\Lambda$ . Considérons une demi-droite issue de ce point<sup>13</sup>; elle recoupe la frontière de  $\Lambda$  en un point<sup>14</sup> “critique”  $A^{\text{cr}}$ . Supposons que cette droite se prolonge dans  $\Omega$ ; nous parlons dans ce cas de *point frontière régulier*. Il s’agit du cas générique.

Lorsqu’un  $A$  sur cette droite passe par  $A^{\text{cr}}$  régulier, il cesse d’être un minimum global de  $F_A(g)$  le long d’une orbite de jauge (car  $A \in \Lambda$ ) pour devenir un minimum local non global (car  $A \in \Omega \setminus \Lambda$ ). Par continuité, en  $A^{\text{cr}}$ , nous avons un point qui est à la fois un minimum global et un minimum local de  $F_{A^{\text{cr}}}$  le long d’une orbite de jauge. Par suite, le minimum absolu de la fonctionnelle de

13. Prendre une droite n’est pas essentiel; nous avons simplement besoin d’une courbe qui rencontre la frontière de  $\Lambda$  de manière suffisamment régulière, de sorte à pouvoir parler d’un “avant” et “après” la frontière. Soulignons que les points de cette demi-droite n’ont aucune raison d’appartenir à la même orbite de jauge. Enfin, l’origine de cette demi-droite peut être n’importe quel point situé à l’intérieur de  $\Lambda$ .

14. et au plus un seul car  $\Lambda$  est convexe [SF82], [AZ91], mais cela ne joue pas de rôle dans notre discussion.

#### I.4. FIXATION DE JAUGE

fixation de jauge  $F_{A^{\text{cr}}}$  est atteint en deux points de la même orbite de jauge, en lesquels  $F_{A^{\text{cr}}}$  prend la même valeur, et donc ces points sont tous deux sur la frontière de  $\Lambda$ . Il s'agit donc de copies de Gribov. Notons que l'ambiguïté de fixation de jauge ne peut se manifester que sur la frontière de  $\Lambda$ , et pas à l'intérieur de cette région.

Un point  $A^{\text{cr}}$  se situant aussi sur la frontière de  $\Omega$  est dit *point frontière singulier*. En un tel point, la valeur propre la plus petite de l'opérateur de Faddeev-Popov s'annule, et la discussion devient plus compliquée. Retenons qu'un argument de théorie de Morse [Baa92] montre que le passage par un tel point provoque l'apparition de copies de Gribov.

#### I.4.2 Difficultés numériques

##### Procédure discrète

Sur le réseau [Giu01], la fonction  $F_U$  à minimiser est :

$$F_U(g) = -\text{Re Tr} \sum_x \sum_{\mu} U_{\mu}^{(g)}(x) \quad (\text{I.33})$$

Elle correspond à la version discrétisée<sup>15</sup> de la condition de jauge de Landau :

$$\sum_{\mu} \left( A_{\mu}^{(g)}(x) - A_{\mu}^{(g)}(x + \mu) \right) = 0 \quad (\text{I.34})$$

Dans le continu, la minimisation de la fonction  $F_A$  induisait deux conditions sur le minimum, à savoir : en un tel point, la dérivée première de  $F_A$  est nulle et la dérivée seconde est positive. Sur réseau, nous cherchons simplement à rendre la variable  $\theta^{(g)}$  définie par ( $V$  est le volume du réseau) :

$$\theta^{(g)} = \frac{1}{V} \sum_x \text{Tr} \left[ \left( A_{\mu}^{(g)}(x) - A_{\mu}^{(g)}(x + \mu) \right) \left( A_{\mu}^{(g)}(x) - A_{\mu}^{(g)}(x + \mu) \right)^{\dagger} \right] \quad (\text{I.35})$$

plus petite qu'une valeur préalablement assignée. Nous avons effectué les fixations de jauge des travaux présentés dans cet exposé en imposant  $\theta \leq 10^{-12}$ . Ce critère contrôle naturellement la vitesse de convergence de l'algorithme.

Ainsi, nous avons remplacé la procédure de fixation de jauge à l'aide des fantômes, dont les aspects non-perturbatifs sont complexes, par une procédure numérique systématique plus transparente, mais très coûteuse en temps de calculs.

---

<sup>15</sup> Afin de donner un sens à la formule en chaque point du réseau, rappelons que nous travaillons toujours avec des conditions périodiques aux bords.

## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

Tous les problèmes ne sont pas résolus pour autant. Il est impensable de toujours parvenir à trouver numériquement le minimum global de la fonction  $F_U$ , ne serait-ce que pour des raisons de précision ou d'artefacts numériques. Par analogie avec la situation du continu, nous adoptons le terme de *copies de Gribov sur réseau*. Le lien avec les copies de Gribov du continu n'est cependant pas direct dans la mesure le travail numérique engendre nécessairement d'autres minima que ceux du continu.

### Artefacts numériques de fixation de jauge

Dans une perspective numérique, le problème de la fixation de jauge ne se réduit pas aux seules copies de Gribov. Il faut aussi prendre en compte la définition du champ de jauge. D'autres choix que  $U(x, \hat{\mu}) = \exp \left( i g_0 a \frac{1}{2} \lambda_b A_\mu^b(x) \right)$  peuvent être faits pour relier les champs de jauge aux variables vivant sur les liens du réseau, et même si tous ont la même limite du continu, il peuvent différer par des termes d'ordre  $\mathcal{O}(a^2)$ . Giusti et al. [Giu98] ont montré que différentes définitions du champ de jauge sur réseau conduisent à des fonctions de Green proportionnelles ; ce facteur supplémentaire est absorbé dans la renormalisation de la fonction de Green, ce qui assure que l'arbitraire de la définition du champ de jauge sur réseau n'influe pas sur la limite du continu.

Il est par ailleurs important de savoir comment se manifestent les copies de Gribov dans les évaluations numériques sur réseau. Une idée consiste à étudier une grandeur invariante de jauge selon deux approches, l'une dépendant de la jauge et l'autre non. Paciello et al. [Pac94] étudient la constante de renormalisation du courant axial en l'extrayant d'éléments de matrice pris entre états hadroniques ou entre quarks. Ils observent un effet des copies de Gribov, mais celui-ci est inséparable du bruit statistique de la méthode de Metropolis. Il s'agit dans ce cas d'un *bruit de Gribov*. Une démarche alternative a été reprise par Giusti et al. [Giu02] pour voir l'impact des copies de Gribov sur les conditions de renormalisation de type MOM, qui portent sur les fonctions de Green. Ils ont calculé, dans la jauge de Landau standard, et dans une modification de cette jauge, les constantes de renormalisation scalaire ( $Z_S$ ), du champ de quark ( $Z_\psi$ ) et du courant axial ( $Z_A$ ). Bien que les deux méthodes de fixation de jauge soient a priori soumises à un bruit de Gribov différent, aucun effet n'est apparu dans la précision des résultats obtenus.

A l'inverse, des effets importants de distorsion du signal ont été observés sur le propagateur du photon dans la théorie  $U(1)$  compacte ; il a été possible de les prendre en compte en supprimant les modes zéros du champ de jauge [Bog99a], [Bog99b].

Enfin, concernant notre travail d'évaluation des fonctions de Green sur réseau en jauge de Landau, retenons que des mesures de propagateur du gluon

dans  $SU(2)$  [Cuc97], [LRG01] ne montrent pas d'effets de copies de Gribov.

## I.5 Aspects de basse énergie

### I.5.1 Pôles de Landau et causalité

La fonction usuellement notée  $\beta$  décrit l'évolution de la constante de couplage sous le flot du groupe de renormalisation selon :

$$\frac{\partial a}{\partial \log Q^2} = \beta(a) = -\beta_0 a^2(Q^2) + \mathcal{O}(a^3) \quad (\text{I.36})$$

avec  $Q^2 = -q^2$  où  $q^2$  est de genre espace,  $a = \alpha_s/\pi$  et  $\beta_0 = \frac{1}{4} (11 - \frac{2}{3}n_f)$ . La résolution de cette équation à l'ordre de plus bas fait apparaître un nouveau paramètre dimensionné  $\Lambda_{\text{QCD}}$  vérifiant :

$$a(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \log \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}} \quad (\text{I.37})$$

Cette équation nous apprend trois choses :

- Même avec des quarks de masse nulle, il existe une échelle (qui est unique dans ce cas) qui va briser l'invariance conforme de la théorie.
- La constante de couplage de QCD décroît logarithmiquement vers une limite nulle à l'infini : c'est le phénomène de *liberté asymptotique*.
- Le calcul que nous venons de faire suppose implicitement que  $a$  est petit, de sorte à négliger les ordres supérieurs du développement de la fonction  $\beta$ . La liberté asymptotique montre que l'usage de la théorie des perturbations est parfaitement valide à haute énergie, et l'est de moins en moins, jusqu'à l'échelle  $\Lambda_{\text{QCD}}$  où les prédictions de la théorie perturbative n'ont plus aucun sens, car elles conduisent à une divergence du paramètre de développement. Ce seuil est appelé *pôle de Landau*.

Bien que la valeur de  $\Lambda_{\text{QCD}}$  puisse varier d'un schéma de renormalisation à l'autre, retenons qu'elle se situe entre 200 MeV et 1 GeV.

Ce résultat est cependant problématique : une observable physique va typiquement admettre un développement perturbatif en série de  $a(Q^2)$ . En vertu du théorème optique, seules les singularités sur l'axe de genre temps ont un sens, car elles correspondent à la production de particules sur couche. Par suite, la présence de singularités de genre espace viole la causalité de la théorie. Cet argument fait donc du pôle de Landau un artefact de la théorie de perturbations. Il est cependant possible de lui donner une signification plus physique et plus élégante, quoique plus spéculative [Gru01] : l'apparition de

## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

singularités de type Landau violant la causalité signale la position de la borne inférieure de la fenêtre conforme. Dans ce cadre, nous supposons que la QCD possède une structure diphasique sous la variation du nombre de saveurs : lorsque le nombre de saveurs est élevé (fenêtre conforme), la théorie est invariante d'échelle à grandes distances ; lorsque le nombre de saveurs est petit, il y a une transition de phase vers un vide non-trivial, exhibant la propriété de brisure de la symétrie chirale.

Une manière de contourner ce problème consiste à modifier l'expression du flot de  $a$  de sorte à rendre  $a$  analytique. Dans certains cas, les bases conceptuelles de la démarche ne sont pas claires [AV02], en dépit d'un accord surprenant avec les données réseau. Dans le cadre de l'approche initiée par Shirkov et al., la contrainte de causalité est essentielle [SS99]. Le principe est le suivant : partant de l'expression de  $a$  à une boucle, et posant  $Q^2 = -(\sigma + i\epsilon)$  où  $\sigma$  et  $\epsilon$  sont des réels, nous obtenons :

$$\text{Im } a(-\sigma) = \frac{\beta_0}{(\beta_0 \pi)^2 + (\beta_0 t)^2} \quad (\text{I.38})$$

à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  (nous notons  $t = \log \sigma / Q^2$ ). La discontinuité de  $a$  sur l'axe de genre espace nous permet alors de définir une densité spectrale  $\rho(\sigma, a)$  par :

$$\rho(\sigma, a) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } a(-\sigma) \quad (\text{I.39})$$

et une *constante de couplage analytique*  $\bar{a}$  par :

$$\bar{a}(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\sigma \frac{\rho(\sigma, a)}{\sigma + Q^2 - i\epsilon} \quad (\text{I.40})$$

La constante de couplage analytique à une boucle est alors :

$$\bar{a}^{(1)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\log \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}} + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2 - Q^2} \right] \quad (\text{I.41})$$

Ainsi définie, cette constante de couplage n'a plus de problème de type pôle de Landau, car celui-ci est exactement tué par le second terme  $\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2 - Q^2}$ . Comme de plus ce nouveau terme est essentiellement une correction en puissance, le comportement de haute énergie est le même que celui de la constante de couplage en perturbation usuelle ; les choses peuvent néanmoins s'avérer plus délicates dans la région intermédiaire, dans la mesure où il ne s'agit que d'une puissance deux. Quoi qu'il en soit, cette constante de couplage analytique possède l'intéressante spécificité de tendre vers la limite universelle  $\frac{4\pi}{\beta_0}$  à transfert  $Q^2$  nul ; elle vaut environ 1,4 dans le cas "quenched".

## I.5. ASPECTS DE BASSE ÉNERGIE

Cette propriété demeure valable lorsque des ordres supérieurs de perturbations sont pris en compte [Ale02]. Par contre, normalisant la constante de couplage analytique à l'échelle du  $Z^0$  par  $\bar{a}(M_Z^2) = 0.1181 \pm 0.002$ , et imposant la continuité de l'évolution de  $\bar{a}$  au passage des différents seuils, nous obtenons :

$$\bar{a}(M_\tau^2) = 0.2943^{+0.0111}_{-0.0106} \quad (\text{I.42})$$

ce qui se situe à  $3,5 \sigma$  de la valeur mesurée [PDG02].

Un autre fait important est que cette méthode ne détermine pas une unique constante de couplage analytique. Par exemple, après une étude fine de l'inversion de la fonction  $\beta$  à deux boucles, Grunberg et al. [GGK98] ont montré que la théorie de perturbations analytique est compatible avec un gel perturbatif ("*perturbative freezing*") avec une limite infra-rouge valant  $-\beta_0/\beta_1$  si  $\beta_1 < -\beta_0^2$ , et avec une valeur infra-rouge universelle valant  $1/\beta_0$  pour  $\beta_1 > -\beta_0^2$ . D'autre part, l'idée de rendre analytique la constante de couplage a été reprise et portée dans des cadres plus généraux par plusieurs auteurs [Web98], [Gad02], [Nes02]. Plus généralement, toute fonction analytique  $f$  impaire et telle que  $\lim_{Q^2 \rightarrow +\infty} f(Q^2) = 1$ , peut servir de candidat *a priori* phénoménologiquement acceptable à la définition d'une constante de couplage analytique  $\bar{a}$  par :

$$\bar{a}(Q^2) = \frac{f\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} - \frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)}{\beta_0 \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad (\text{I.43})$$

Cette nouvelle constante correspond à la constante perturbative usuelle dans l'ultra-violet ; elle vérifie  $\bar{a}(Q^2) = \bar{a}(\Lambda^2/Q^2)$ , si bien qu'elle est finie (et même nulle) dans l'infra-rouge. Elle est bien sûr analytique. Ceci montre donc qu'il existe une part d'arbitraire résiduelle après utilisation des arguments de causalité et d'analyticité. Choisir une forme fonctionnelle plutôt qu'une autre devra nécessairement s'appuyer sur une confrontation massive aux données expérimentales pour être vraiment discriminante.

L'hypothèse d'un comportement infra-rouge universel a été abondamment reprise phénoménologiquement dans les dernières années sous l'impulsion des idées de Dokshitzer, Marchesini et Webber pour décrire les corrections en puissance [DMW95], [DW95]. Dans ce modèle, les moments de  $\alpha_S$  intégré dans la région infra-rouge jouent le rôle de paramètres non-perturbatifs décrivant la forme et l'amplitude des corrections en puissance.

Le principe est le suivant : considérons une quantité observable adimensionnée de la forme  $F = \int_0^Q dk f(k)$ , où  $f(k) \propto \alpha_S(k^2)k^p/Q^{p+1}$  pour  $k \ll Q$ . Nous introduisons une échelle  $\mu_I$  ( $\Lambda \ll \mu_I \ll Q$ ) séparant les contributions perturbative et non-perturbative, de sorte à scinder  $F$  en  $F_p$  et  $F_{np}$ . La partie



non-perturbative  $F_{np}$  est paramétrée en fonction des :

$$\langle \alpha_p(\mu_I) \rangle = \frac{p+1}{\mu_I^{p+1}} \int_0^{\mu_I} dk \alpha_S(k^2) k^p \quad (\text{I.44})$$

Ces quantités sont universelles (elles ne dépendent que de  $\alpha_S$  et pas de l'observable considérée) et accessibles expérimentalement.  $\mu_I$  est usuellement de l'ordre de 2 GeV. De plus, les valeurs de  $\alpha_0$  extraites de différentes observables sont en général en accord dans les barres d'erreurs [Klu01]. Les  $\alpha_p(\mu_I)$  rendent compte de l'écart du comportement de  $\alpha_S$  à basse énergie à la théorie de perturbations. Cependant, même si cette paramétrisation est efficace, elle n'est pas un modèle du comportement non-perturbatif de  $\alpha_S$  et de ses contributions aux observables physiques.

### I.5.2 Développements perturbatifs en QCD

Pour fixer les idées, considérons une observable hadronique adimensionnée  $R$  dépendant d'une échelle externe  $p$  et renormalisée à l'échelle  $\mu$ . La théorie de perturbations assure que  $R$  se comporte comme :

$$R(p^2; \mu^2) = \sum_{0 \leq m \leq n} c_{nm} \alpha_{S, \text{nu}}^n \log^m \frac{p}{\mu} \quad (\text{I.45})$$

Les logarithmes peuvent être resommés par les méthodes du groupe de renormalisation, ce qui permet d'écrire le développement au logarithme dominant, ou sous-dominant, ou sous-sous-dominant, etc. de  $R$  en fonction de la constante de couplage renormalisée seulement :

$$R(p^2; \mu^2) = \left( \frac{\alpha_S(\mu^2)}{\alpha_S(p^2)} \right)^{-\gamma_{R,0}/\beta_0} \sum_n r_n \alpha_S(\mu^2)^{n+1} \quad (\text{I.46})$$

où  $\gamma_{R,0}$  est la dimension anormale de  $R$  à une boucle, que nous prendrons nulle dans la suite afin de simplifier la discussion. Nous pouvons d'ores et déjà noter qu'une série entière ne peut reproduire des structures profondément non-perturbatives, telles que les instantons, qui contribuent à l'action de QCD en  $\exp -\frac{8\pi}{g^2}$ .

Le comportement asymptotique des séries d'intérêt phénoménologique est en général  $r_n \propto n! a^n n^b$ , ce qui fait d'elles des séries divergentes. Cet argument avait été physiquement relevé par Dyson [Dys52] dès 1952 pour la QED : si nous supposons qu'un développement perturbatif (en  $e^2$ ) a un rayon de convergence fini, alors le résultat doit aussi converger pour des valeurs négatives de  $e^2$ . Cependant, une théorie avec  $e^2$  négatif est telle que les charges de même signe

## I.5. ASPECTS DE BASSE ÉNERGIE

s'attirent, et celles de signes opposés se repoussent. Il est alors possible de créer des paires électron-positron à partir du vide, et de les séparer à l'infini pour obtenir une configuration d'énergie plus basse ; ceci va entraîner la formation à l'infini de deux amas (infinis) de particules, si bien que le vide devient instable.

La série perturbative est par conséquent au mieux asymptotique à la fonction  $R$  que nous cherchons à reproduire, ce qui signifie qu'ajouter des termes supplémentaires va permettre de nous rapprocher de la valeur de  $R$  recherchée, jusqu'au moment où l'ajout de termes va dégrader l'approximation obtenue, et nous éloigner du résultat. Ceci montre qu'il existe un rang de développement optimal, dont nous donnerons un peu plus loin un ordre de grandeur.

Un outil adapté au traitement de séries possédant un tel comportement asymptotique est la *transformation de Borel*. La transformée de Borel de  $R$  est définie par :

$$B[R](t) = \sum_n \frac{r_n}{n!} t^{n+1} \quad (\text{I.47})$$

Le théorème de Nevanlinna-Sokal précise sous quelles conditions cette transformation peut s'inverser en :

$$R'[\alpha_S] = \int_0^{+\infty} dt e^{-t/\alpha_S} B[R](t) \quad (\text{I.48})$$

La série de perturbations de  $R$  devient le développement de Taylor de  $R'$ , qui ne converge pas, mais est asymptotique à  $R'$ . Dans le cas de la théorie scalaire  $\phi^4$  à quatre dimensions, il a été possible de montrer que cette fonction coïncide avec la fonction définie par la théorie constructive [Riv91], [Cal82]. Cependant, 't Hooft [tHo77] a montré que ces conditions sont trop contraignantes pour la QCD : même si les transformées de Borel des fonctions de Green de la QCD n'avaient pas de singularité sur l'axe réel positif, l'intégrale de la transformée de Borel divergerait toujours en  $+\infty$ . Nous conservons cependant l'idée que les pôles de la transformée de Borel nous renseignent sur les contributions à ajouter aux évaluations perturbatives de quantités physiques.

La tâche de donner un sens à la série de perturbations consiste donc maintenant à classer les pôles de  $B[R]$  dans le plan de Borel [Mue93]. En effet, une divergence de la série originelle  $R$  se traduit par une singularité de la transformée de Borel  $B[R]$ . Nous distinguons essentiellement trois types de singularités<sup>16</sup> :

- Les *renormalons ultra-violets*, situés sur l'axe négatif du plan de Borel en les  $t_m = -\frac{m}{\beta'_0}$  pour  $m$  entier naturel  $\geq 1$ . Ils ont pour origine l'intégration

---

16. Nous notons  $\beta'_0 = \frac{\beta_0}{4\pi}$  afin d'employer les notations standard des physiciens travaillant sur les problèmes des renormalons. Les résultats cités sont obtenus dans la limite de grand nombre de saveurs [Ben98].

sur les grandes impulsions dans les boucles, mais la liberté asymptotique atténue suffisamment leur effet pour qu'ils n'interviennent pas sur le problème de sommabilité de Borel.

- Les *renormalons infra-rouges*, situés sur l'axe positif du plan de Borel en les  $t_m = \frac{m}{\beta_0}$  pour  $m$  entier naturel  $\geq 1$ . Ils traduisent le fait que le domaine d'intégration comprend le pôle de Landau lors d'évaluation de boucles dans des diagrammes de Feynman. Il s'agit donc d'un problème de comportement à grande distance. Ils se manifestent par des corrections en puissances  $\geq 1$  aux calculs perturbatifs.
- Les *instantons*, situés sur l'axe positif du plan de Borel en les  $t_m = 4\pi m$  pour  $m$  entier naturel  $\geq 1$ . Ils donnent des corrections en puissance au comportement perturbatif supprimées par des puissances  $\geq 8\pi$ , et sont donc de rôle négligeable en QCD perturbative.

Cette typologie des singularités du plan de Borel est récapitulée sur la FIG. I.3. Notons qu'il n'y a pas nécessairement un pôle à chaque valeur de l'entier  $m$  ; des observables différentes vont admettre des pôles à de valeurs de  $m$  différentes.

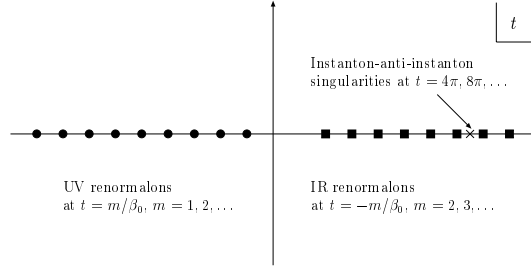


FIG. I.3 –: *Singularités dans le plan de Borel. Figure extraite de [Ben98].*

Nous pouvons nous faire une idée de l'ordre jusqu'auquel il est raisonnable de faire confiance à la théorie de perturbation. Nous estimons le rapport de deux termes consécutifs de la série perturbative de  $R$  par rapport au pôle dominant de la transformée de Borel dans chacun de trois cas :

- Renormalon ultra-violet :  $\frac{r_{n+1}}{r_n} \simeq \beta_0' \frac{n}{m}$ .
- Renormalon infra-rouge :  $\frac{r_{n+1}}{r_n} \simeq -\frac{n}{m} \beta_0'$ .
- Instanton :  $\frac{r_{n+1}}{r_n} \simeq \frac{n}{m} \frac{1}{4\pi}$ .

La théorie de perturbation va donc vraisemblablement arrêter de reproduire les données dès que <sup>17</sup>  $\alpha_S \frac{r_{n+1}}{r_n} \simeq 1$ , soit  $n\beta_0' \alpha_S \simeq 1$ , i.e.  $n \simeq \frac{12\pi}{(33-2n_f)\alpha_S}$ . Il faut donc s'attendre à rencontrer des problèmes d'asymptoticité dès les premiers

<sup>17</sup>. Pour mener ce calcul d'ordre de grandeur, nous prenons  $m = 1$ .

## I.5. ASPECTS DE BASSE ÉNERGIE

ordres de perturbations, et certainement au plus tard pour  $n$  entre 5 et 10. Par contre, le critère  $n\beta_0\alpha \simeq 1$  explique le succès de la série perturbative pour reproduire les données expérimentales en QED.

Récapitulons : la série de perturbation de QCD non seulement ne converge pas, mais n'est pas sommable au sens de Borel. Nous présumons qu'elle est rapidement mise en défaut. Ces faits rendent cruciales des études complètement non-perturbatives de QCD reposant sur les premiers principes. Le réseau, par son aptitude à relier de la physique à différentes échelles, et à faire un pont entre les régions perturbative et non-perturbative est aujourd'hui un instrument essentiel pour tester les limites de validité de la théorie de perturbations et les corrections nécessaires à y apporter.

### I.5.3 Fonctions de Green et critères de confinement

Plusieurs scénarii de confinement reposant sur le comportement à grande distance des fonctions de Green de QCD ont été proposés, notamment par Kugo et Ojima [KO79] et Zwanziger [Zwa91a], [Zwa91b] et [Zwa02], dont les idées au sujet de l'explosion du propagateur du fantôme dans l'infra-rouge se rejoignent [AFS03]. L'étude non-perturbative des fonctions de Green permet donc à la fois de tester ces scénarii et de confronter les données numériques aux prédictions faites lors de l'élaboration de ces modèles, notamment la valeur des exposants critiques infra-rouges. Au-delà du problème du confinement, les fonctions de Green permettent de calculer l'évolution de la constante de couplage de QCD, qui dirige l'évolution de toutes les quantités renormalisables et qui fait apparaître la seule échelle physique non-perturbative autre que les masses des quarks.

Suivant une idée de Gribov [Gri78] consistant restreindre l'espace d'intégration de la fonction de partition de QCD à l'horizon de Gribov<sup>18</sup>, Zwanziger a résolu des équations de Schwinger-Dyson dans la théorie de Faddeev-Popov [Zwa01], et a obtenu les comportements suivants :

$$\text{Propagateur du gluon} \simeq k^2 \quad \text{Propagateur du fantôme} \simeq \frac{1}{(k^2)^2} \quad (\text{I.49})$$

ou encore :

$$\text{Propagateur du gluon} \simeq (k^2)^{0,19} \quad \text{Propagateur du fantôme} \simeq \frac{1}{(k^2)^{1,595}} \quad (\text{I.50})$$

---

<sup>18</sup>. Même si cet argument n'est pas valide, car il y a des copies de Gribov à l'intérieur de l'horizon de Gribov [AZ91].

## CHAPITRE I. QCD : DU CONTINU AU RÉSEAU

La première solution est en accord avec le résultat de Gribov. Plus récemment, en utilisant une démarche de quantification stochastique, Zwanziger [Zwa02] montre qu'à la limite du paramètre de jauge  $\alpha \rightarrow 0$  de la jauge de Landau :

$$\begin{aligned} \text{Propagateur du gluon transverse} &\simeq (k^2)^{0,043} \\ \text{Propagateur du gluon longitudinal} &\simeq \frac{\alpha}{(k^2)^{1,521}} \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

Même si la composante longitudinale disparaît à la limite de la jauge de Landau, des vertex en  $\alpha^{-1}$  lui permettent toutefois de contribuer dans les lignes internes des graphes.

Toujours dans le cadre des équations de Schwinger-Dyson, Lerche et von Smekal [LS02] prédisent un comportement en  $(k^2)^{0,19}$  pour le propagateur du gluon en jauge de Landau, en accord qualitatif<sup>19</sup> avec les résultats sur réseau de Langfeld et al. [LRG01], [Lan02], et une limite infra-rouge finie  $\simeq 2.97$  pour la constante de couplage.

Néanmoins, vérifier ces comportements asymptotiques de manière très précise sur réseau relève encore du défi technique, car il faut disposer de très grands volumes : Cucchieri et Mendes [CM03], après une étude du propagateur du gluon de  $SU(2)$  en jauge de Landau sur les volumes  $40^3$ ,  $80^3$  et  $140^3$  observent une décroissance du propagateur du gluon pour les impulsions  $\lesssim 350$  MeV. Une difficulté supplémentaire est que les points à petites impulsion sont les plus sujets aux effets de volume fini.

Ainsi, une mesure fine des exposants critiques infra-rouges est manifestement encore difficilement accessible, et dans tous les cas hors de portée des simulations que nous avons réalisées au cours du travail présenté dans cet exposé. Cependant, un point mérite d'être détaillé plus avant, car il décrit un comportement qualitatif sans recourir à la technologie des équations de Schwinger-Dyson, dont les erreurs de troncation sont a priori, sinon incontrôlables, au moins difficilement estimables. Il s'agit d'un résultat de Zwanziger de 1991 [Zwa91a], [Zwa91b], selon lequel toutes les fonctions de Green gluoniques connexes sur réseau s'annulent à impulsion nulle à la limite de volume infini.

Le début de la procédure reprend la description de la SEC. I.4. La jauge de Landau est fixée par minimisation d'une fonction. Cette minimisation conduit à une condition de transversalité et à une condition de positivité  $(\omega, M(U)\omega) \geq 0$  où  $M(U)$  est une matrice réelle, dite *matrice de Faddeev-Popov sur réseau* et  $\omega$  un élément de l'algèbre de Lie  $su(3)$ . La zone sur laquelle  $M(U)$  est positive est dite *région de Gribov sur réseau*. Elle contient la région fondamentale modulaire en lesquels les minima globaux de la fonctionnelle sont atteints.

---

<sup>19</sup>. L'accord porte sur le comportement qualitatif suivant : le propagateur du gluon à impulsion nulle est fini, voire nul, et le propagateur du fantôme est divergent.

## I.5. ASPECTS DE BASSE ÉNERGIE

Il est possible de décomposer  $M(U)$  en  $K(A) + M_1(U)$  où la matrice  $K(A)$  est l'analogie discret de l'opérateur de Faddeev-Popov du continu, obtenu en remplaçant les dérivées par des différences finies. Cette matrice est positive sur une région contenant  $\Omega$  ; cette condition de positivité appliquée à un vecteur bien choisi<sup>20</sup>, entraîne que :

$$\left| \frac{1}{V} \sum_x A_\mu(x) \right| \leq 2 \tan \frac{\pi}{L} \quad (\text{I.52})$$

Dès lors, la fonction de partition munie d'une source  $H_\mu^a$  indépendante de  $x$  vérifie :

$$Z(H) = \int dA \rho(A) \exp \left( H_\mu^b \sum_x A_\mu^b(x) \right) \leq \exp \left( 2V \sum_\mu |H_\mu| \tan \frac{\pi}{L} \right) \quad (\text{I.53})$$

L'énergie libre  $W(H)$  est analytique (car sur réseau), convexe<sup>21</sup> et positive : elle admet donc un unique minimum qui ne peut être que  $W(0) = 0$ . Ainsi, l'énergie libre par unité de volume  $w(H)$  est bornée par :

$$0 \leq w(H) \leq 2 \sum_\mu |H_\mu| \tan \frac{\pi}{L} \quad (\text{I.54})$$

A la limite de volume infini, l'énergie libre par unité de volume (et ses dérivées) vont toutes s'annuler ; le fait que  $H$  ne dépende pas de  $x$  restreint ce résultat aux impulsions nulles. En particulier, le propagateur du gluon sur un réseau infini s'annule à impulsion nulle.

---

20. qui n'est autre que  $\omega^a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(ik_0 x) \chi^a$  où  $k_0$  est dirigé dans la direction  $\mu$ , de longueur  $\frac{2\pi}{L}$  et  $\chi$  est un vecteur de plus haut point de la représentation adjointe de  $su(3)$ .

21. Cela correspond, en physique statistique, à la positivité de la capacité calorifique [Riv87].



# Chapitre Deux

---

## Analyse asymptotique des fonctions de Green

---

### II.1 Evaluation sur réseau

#### II.1.1 Méthode des fonctions de Green

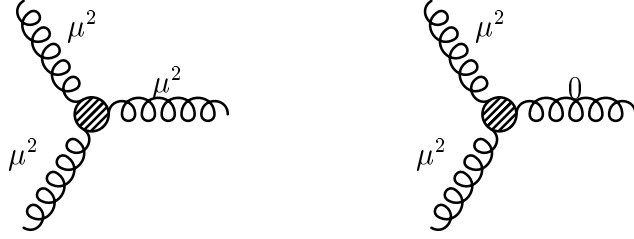
L'évaluation sur réseau de  $\alpha_s$  à partir du couplage à trois gluons a été proposée et explorée par Parrinello [Par94] puis Alles et al. [All96a] et [All96b]. Cette méthode a été reprise par la collaboration X - Orsay dès 1998 [Bou98]. Le vertex à trois gluons renormalisé non-perturbativement et amputé des trois propagateurs entrants, eux aussi renormalisés non-perturbativement, est la constante de couplage renormalisée  $g_R$  du Lagrangien (I.1) de la QCD. Les renormalisations sont effectuées par des conditions de type MOM. A la différence du propagateur du gluon, différentes configurations cinématiques sont envisageables pour le vertex à trois pattes. Ces configurations définissent des schémas de renormalisation différents pour  $\alpha_s$ . Notons que dans la théorie "pure jauge", i.e. sans quark, le Lagrangien renormalisé est complètement déterminé par la renormalisation des deux fonctions de Green considérées. Toutes les fonctions de Green ont été calculées en jauge de Landau. Dans la suite, nous travaillerons avec les deux schémas exposés TAB. II.1. Le vertex à trois gluons est dit *symétrique* si les impulsions entrantes  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  vérifient  $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = \mu^2$ , et *asymétrique* si  $p_1^2 = p_3^2 = \mu^2$  et  $p_2^2 = 0$ .

Dans la jauge de Landau, le propagateur du gluon euclidien s'écrit :

$$\langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle = G^{(2)}(p^2) \delta^{ab} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (\text{II.1})$$



## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE



TAB. II.1 –: *A gauche : Vertex symétrique (Schéma MOM). A droite : Vertex asymétrique (Schéma  $\overline{MOM}$ ).*

Nous extrayons le facteur de forme selon :

$$G^{(2)}(p^2) = \frac{\delta^{ab}}{N^2 - 1} \frac{1}{3} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle \quad (\text{II.2})$$

Ceci est valable tant que l'impulsion traversant le propagateur du gluon est non-nulle. Dans le cas contraire, sachant que la jauge de Landau n'élimine pas les transformations de jauge globale, le propagateur du gluon dispose d'un degré de liberté supplémentaire à impulsion nulle, conduisant naturellement à poser :

$$G_{\mu\nu}^{(2)}(0) = \delta_{\mu\nu} G^{(2)}(0) \quad (\text{II.3})$$

En jauge de Landau, il n'y a que deux tenseurs indépendants au point de renormalisation symétrique, ce qui permet de paramétrer le vertex à trois gluons sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_{\mu_1}^{a_1}(p_1) \tilde{A}_{\mu_2}^{a_2}(p_2) \tilde{A}_{\mu_3}^{a_3}(p_3) \rangle &= f^{a_1 a_2 a_3} \left[ G^{(3)}(\mu^2, \mu^2, \mu^2) [\delta_{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)_{\mu'_3} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)_{\mu'_1} + \delta_{\mu'_3 \mu'_1} (p_3 - p_1)_{\mu'_2}] \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1,3} \left( \delta_{\mu'_1 \mu'_2} - \frac{p_{i\mu'_i} p_{i\mu_i}}{p_i^2} \right) + H^{(3)}(\mu^2, \mu^2, \mu^2) \right. \\ &\quad \left. \frac{(p_1 - p_2)_{\mu_3} + (p_2 - p_3)_{\mu_1} + (p_3 - p_1)_{\mu_2}}{\mu^2} \right] \quad (\text{II.4}) \end{aligned}$$

Nous obtenons  $G^{(3)}(\mu^2, \mu^2, \mu^2)$  par la contraction suivante :

$$\begin{aligned} G^{(3)}(\mu^2, \mu^2, \mu^2) &= \frac{1}{18\mu^2} \frac{f^{a_1 a_2 a_3}}{N(N^2 - 1)} \langle \tilde{A}_\mu^{a_1}(p_1) \tilde{A}_\nu^{a_2}(p_2) \tilde{A}_\rho^{a_3}(p_3) \rangle \left[ [\delta_{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)_{\mu'_3} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)_{\mu'_1} + \delta_{\mu'_3 \mu'_1} (p_3 - p_1)_{\mu'_2}] \prod_{i=1,3} \left( \delta_{\mu'_1 \mu'_2} - \frac{p_{i\mu'_i} p_{i\mu_i}}{p_i^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p_1 - p_2)_{\mu_3} + (p_2 - p_3)_{\mu_1} + (p_3 - p_1)_{\mu_2}}{2\mu^2} \right] \quad (\text{II.5}) \end{aligned}$$

## II.1. EVALUATION SUR RÉSEAU

Le vertex asymétrique possède une structure tensorielle plus simple :

$$G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p, 0, -p) = 2f^{abc}p_\rho \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) G^{(3)}(p^2) \quad (\text{II.6})$$

qu'on inverse pour extraire le facteur de forme :

$$G^{(3)}(p^2) = \frac{1}{144p^2} G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p, 0, -p) \delta_{\mu\nu} p_\rho \quad (\text{II.7})$$

Notant alors :

$$Z_3(p^2) = p^2 G^{(2)}(p^2) \quad (\text{II.8})$$

la constante de renormalisation du propagateur du gluon, la constante de couplage renormalisée à l'échelle  $\mu$  est donnée par :

$$g_R(\mu) = \frac{G^{(3)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) Z_3^{3/2}(\mu^2)}{G^{(2)}(p_1^2) G^{(2)}(p_2^2) G^{(2)}(p_3^2)} \quad (\text{II.9})$$

où un choix convenable des impulsions  $p_1, p_2$  et  $p_3$  distingue les évaluations de  $g_R(\mu)$  issues du vertex symétrique ou asymétrique. De manière standard, nous définissons :

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{g_R^2(\mu)}{4\pi} \quad (\text{II.10})$$

Les méthodes du groupe de renormalisation nous enseignent qu'il existe une fonction  $f$  ne dépendant que de  $\alpha_S$  telle que le flot de la constante de couplage soit décrit par un unique paramètre  $\Lambda_{\text{QCD}}$  de la manière suivante :

$$\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} = f(\alpha_S) \quad (\text{II.11})$$

Cette fonction est parfaitement calculable perturbativement, jusqu'au troisième ou quatrième ordre suivant les schémas de renormalisation. Elle est donnée explicitement dans l'ANNEXE A. Nous pouvons donc introduire une fonction (perturbative)  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  définissant un " $\Lambda_{\text{QCD}}$  effectif" dépendant de l'échelle de renormalisation  $\mu$ , et de l'ordre auquel elle est évaluée en perturbation :

$$\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2) = \frac{\mu}{f(\alpha_S(\mu^2))} \quad (\text{II.12})$$

tendant vers  $\Lambda_{\text{QCD}}$  à la limite  $\mu \rightarrow +\infty$ , ou, en vertu de la propriété asymptotique, dans la limite de couplage faible.

## II.1.2 Symétrie hypercubique et artefacts

### Brisure de la symétrie de Lorentz

La régularisation du réseau permet de supprimer les divergences de la théorie sans perdre l'invariance de jauge, i.e. sans briser la symétrie qui la définit. Cette construction a un prix, car elle brise l'invariance sous le groupe de Lorentz pour le remplacer par un sous-groupe, le groupe hypercubique  $H^4$ . En effet, la continuation analytique vers l'espace euclidien remplace  $SO(3,1)$  par  $SO(4)$ , puis la discrétisation de l'espace-temps  $SO(4)$  par  $H^4$ . Ce groupe fini est le produit semi-direct du groupe des permutations des composantes des impulsions sur réseau par le groupe des réflexions du réseau. Il a donc  $2^4 \times 4! = 384$  éléments.

Par conséquent, l'invariance de Lorentz (dans sa version euclidienne) ne se traduit plus par des facteurs de forme constants sur les boules de  $\mathbb{R}^4$ , mais par une invariance sur les orbites de  $H^4$ . Nous nous restreignons à des impulsions comprises dans le premier quart de la zone de Brillouin, i.e. telles que  $n^2 = n^\mu n_\mu \leq \left(\frac{N}{4}\right)^2$  où nous notons  $p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{Na}$ . Pour  $r \in \{1, \dots, 4\}$ , définissons  $n^{[2r]} = n_1^{2r} + n_2^{2r} + n_3^{2r} + n_4^{2r}$ ; lorsque  $r = 2$ , nous retrouvons simplement  $n^2$ . Nous définissons de même des quantités  $p^{[2r]}$  pour  $r \in \{1, \dots, 4\}$  en multipliant les  $n^{[2r]}$  par  $\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2r}$ . Il est possible de montrer [Spr77] que les orbites sous l'action du groupe  $H^4$  sont entièrement caractérisées par la donnée des  $n^{[2r]}$  pour au plus quatre valeurs de  $r$ . Plus précisément, pour la gamme d'impulsions considérée sur les réseaux sur lesquels nous avons travaillé :

- Sur un réseau  $16^4$ , à chacune des 16 valeurs de  $n^2$  considérées correspond au plus deux orbites distinctes en  $n^{[4]}$ .
- Sur un réseau  $24^4$ , à chacune des 36 valeurs de  $n^2$  considérées correspond au plus quatre orbites distinctes en  $n^{[4]}$ .

Ceci signifie que les orbites qui nous intéressent sont caractérisées par leurs valeurs de  $n^2$  et  $n^{[4]}$ . Par conséquent, un point “physique” sur réseau, à impulsion  $p^2$  donnée, peut, du fait de la discrétisation, être dégénéré jusqu'en quatre points distincts. A la limite du continu, ces points coïncident bien sûr à nouveau.

L'utilité de cet argument de symétrie est double. D'une part il prédit une dégénérescence des valeurs numériquement obtenues sur réseau à chaque “impulsion adimensionnée”  $n^2$ . D'autre part, il permet de prendre en compte l'ensemble des symétries de la situation considérée en moyennant sur chaque orbite  $(n^2, n^{[4]})$  les valeurs d'une quantité physique évaluée numériquement en chaque point de cette orbite.

Les orbites sont faciles à mettre en place dans le cas du propagateur du gluon ou du vertex asymétrique dans la mesure où ces fonctions de Green

## II.1. EVALUATION SUR RÉSEAU

ne dépendent que d'une impulsion  $p_\mu$ . Le vertex symétrique est plus délicat car il faut prendre en compte des triplets d'impulsions  $(p_1, p_2, p_3)$  telles que  $p_1 + p_2 + p_3 = 0$  et  $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2$ . En particulier, il y a autant de triplets que d'impulsions accessibles pour le vertex asymétrique, alors que ce n'est plus le cas du vertex symétrique. Un triplet d'impulsions vérifie en effet  $(n_1 + n_2)^2 = n_3^2 = n_1^2 = n_2^2$ , soit  $2n_1^\mu n_{2,\mu} = -n_1^2$ , ce qui impose aux  $n_i$  d'être pairs. Nous avons pu trouver un triplet  $(n_1, n_2, n_3)$  pour chaque entier pair  $n^2$ . Par ailleurs, le groupe de symétrie des triplets du vertex symétrique est plus large, car au-delà du groupe de symétrie hypercubique pour une impulsion, il faut prendre en compte les permutations des trois impulsions des triplets.

### Artefacts de maille finie

Le fait de ne jamais prendre explicitement la limite du continu implique qu'il subsiste une dépendance résiduelle en la maille du réseau ; cette dépendance joue un rôle plus ou moins prononcé selon les observables considérées. Cependant, certains cas sont apparus où le traitement de ces effets était nécessaire. Dans ce cas, les données "quenched" ont fourni un banc d'essai remarquable pour le développement de méthodes systématiques de suppression des artefacts grâce à leur très haute qualité ; en effet, la statistique élevée de l'analyse a produit des barres d'erreurs souvent indistinguables des tailles des points sur les courbes. Ces méthodes, parfaitement testées dans les analyses "quenched", peuvent alors être exportées vers les travaux "unquenched", moins précis par manque de puissance de calcul.

Les effets pris en compte sont de deux types et concernent les effets en  $\mathcal{O}(a^2 p^2)$ . L'un consiste à modifier les tenseurs qui servent à extraire les facteurs de forme, pour les écrire non pas dans le continu, mais sur réseau. L'autre se propose d'éliminer la dépendance résiduelle en  $\mathcal{O}(a^2 p^2)$ , qui fait qu'une quantité "physique" évaluée à une impulsion  $p$  peut, sur réseau, prendre jusqu'à quatre valeurs éventuellement non comptatibles dans leurs erreurs. Dans les deux cas, il s'agit de se rapprocher de la limite du continu.

Le premier type d'effets est remarquable lors de la juxtaposition de données physiques issues de réseaux différents, où la présence de "décrochages" traduit un comportement asymptotique non pas en  $p^2$ , mais en  $a^2 p^2$ . Ramenée aux données d'un réseau unique, cette dépendance se manifeste par un comportement anormal à grande impulsion.

Le point-clé est de remarquer que les impulsions de la théorie "pure jauge" sur réseau sont non pas les impulsions  $p_\mu$ , mais leur version discrétisée :

$$\hat{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin \left( \frac{ap_\mu}{2} \right) \quad (\text{II.13})$$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Par exemple, le propagateur du gluon libre sur réseau est, :

$$G_{\text{Latt}}^{(2)}(p^{[2]}, p^{[4]}) = \frac{1}{\hat{p}^2} \quad \text{en notant} \quad \hat{p}^2 = \sum_{\mu} \hat{p}_{\mu}^2 \quad (\text{II.14})$$

Notamment, la fixation de la jauge de Landau ( SEC. I.4.2) par minimisation de

$$F_U(g) = \sum_{\mu, x} \text{Re Tr } U_{\mu}^{(g)}(x) \quad (\text{II.15})$$

implique  $\hat{p}^{\mu} A_{\mu}^a(p) = 0$  alors que  $p^{\mu} A_{\mu}^a(p)$  ne s'annule pas forcément. L'effet n'est pas anodin comme le montre le calcul :

$$\hat{p}_{\mu} \simeq p_{\mu} \left( 1 - \frac{1}{24} a^2 p_{\mu}^2 \right) + \mathcal{O}(a^4) \quad (\text{II.16})$$

Nous pouvons alors corriger les différents tenseurs de projection (II.2), (II.7) et (II.5). Ces corrections prennent la forme d'une division de  $\alpha_s$  par un coefficient  $c$ , proche de 1, que nous appelons *correction en sinus* :

$$\alpha_s^{\text{corrigé}} \equiv \frac{\alpha_s}{c} \quad (\text{II.17})$$

Un test sur 1000 configurations “pure jauge” à  $\beta = 6,0$  sur un réseau  $24^4$  [Bou98] montre un meilleur comportement asymptotique de  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  calculé sur réseau à trois boucles à chaque valeur de l'échelle considérée  $\mu$  comme présenté FIG. II.1.

Le second type d'artefacts en  $\mathcal{O}(a^2 p^2)$  traite des situations dont la FIG. II.2 est un exemple typique. Sur cette figure issue de [Bec99], nous montrons la quantité  $Z_3 = p^2 G_{\text{Latt}}^{(2)}(p^2)$ . Les artefacts hypercubiques sont clairement réduits par la modification du tenseur d'extraction du facteur de forme, mais un effet résiduel important demeure.

La solution usuellement privilégiée par la communauté de QCD sur réseau consiste à ne retenir que les données des orbites dites “démocratiques”, telles que  $n^2$  est à peu près uniformément distribué sur les  $n_{\mu}$ .

Nous utilisons ici une méthode dite d'*extrapolation en  $p^{[4]}$*  présentée dans [Bec99]. Elle repose sur le développement limité :

$$\hat{p}^2 = p^2 - \frac{1}{12} a^2 p^{[4]} + \mathcal{O}(a^4) \quad (\text{II.18})$$

Nous supposons que le facteur de forme  $G_{\text{Latt}}^{(2)}$  est une fonction régulière des invariants hypercubiques  $p^{[2]}$  et  $p^{[4]}$ . L'équation précédente montre qu'il s'agit en fait d'une dépendance en  $p^2$  et  $p^{[4]}$  à des termes d'ordres supérieurs en  $a$

## II.1. EVALUATION SUR RÉSEAU

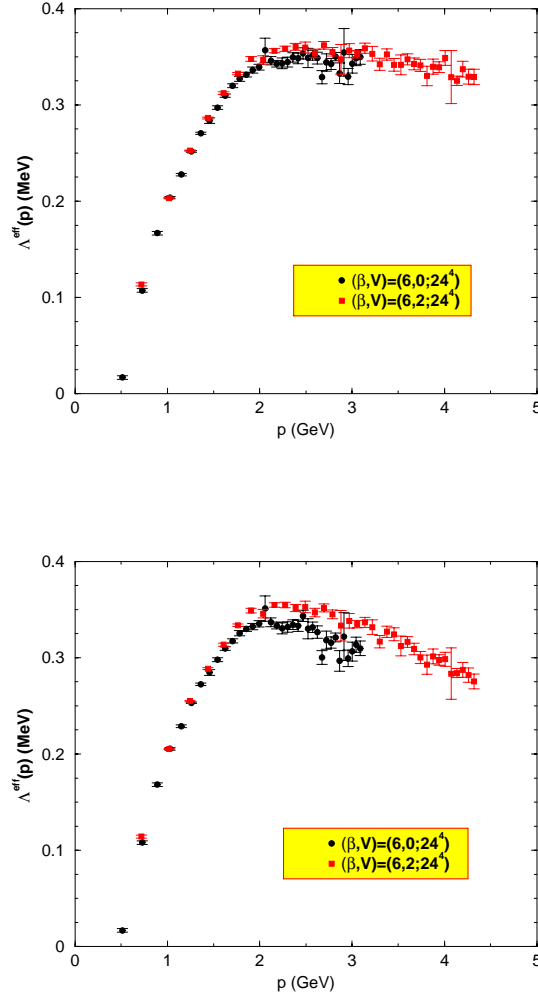


FIG. II.1 –:  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  évalué à partir du vertex asymétrique avec (en haut) et sans (en bas) corrections en sinus. Les données à  $\beta \in \{6, 0; 6, 2\}$  s’ajustent sur une même courbe lisse avec corrections en sinus; sans les corrections en sinus, un “détachement” est perceptible, signalant un effet en  $\mathcal{O}(a^2 p^2)$ . Même avec corrections en sinus,  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  décroît en fonction de  $\mu$  et n’atteint pas encore sa valeur asymptotique. Les mailles sont fixées à partir de [BS92].

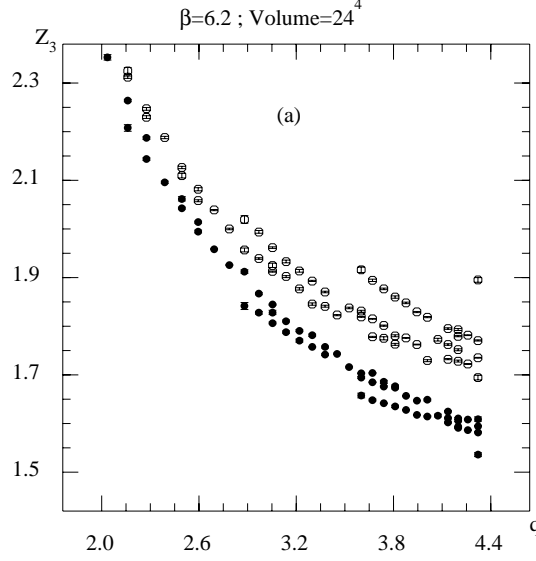


FIG. II.2 –:  $p^2 G_{Latt}^{(2)}$  (cercles blancs) et  $\hat{p}^2 G_{Latt}^{(2)}$  (cercles noirs).

près. Dimensionnellement, la dépendance du propagateur du gluon sur réseau est en  $p^2$ , quantité du continu, et  $a^2 p^{[4]}$ , si bien qu'à réseau fixé, la limite du continu  $a \rightarrow 0$  est la même que la limite  $p^{[4]} \rightarrow 0$  si nous négligeons les artefacts en au moins  $\mathcal{O}(a^4)$ . Ainsi, plutôt que de sélectionner certaines orbites et de rejeter les autres, nous gardons l'information de toutes, et définissons un propagateur sur réseau lissé par :

$$G_{bare}^{(2)}(p^2) = \lim_{p^{[4]} \rightarrow 0} G_{Latt}^{(2)}(p^2, p^{[4]}) \quad (\text{II.19})$$

Cette méthode fonctionne parfaitement : elle permet de produire une courbe plus régulière que la traditionnelle méthode “démocratique” ( FIG. II.3).

## II.2 Développement en produit d'opérateurs des fonctions de Green

Le *développement en produit d'opérateurs* (OPE pour “Operator Product Expansion”) consiste essentiellement en un développement asymptotique d'un produit d'opérateurs locaux pris en un même point ; à ce titre, il s'agit d'un objet hautement singulier. Toute la difficulté provient de la définition de ces opérateurs locaux (dits *composites*) *renormalisés* apparaissant dans ce développement, ou, en posant le problème différemment, de l'évaluation des coefficients

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN

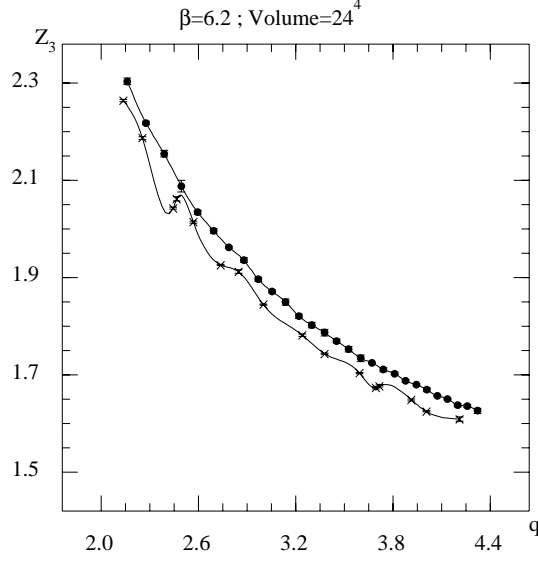


FIG. II.3 —: *Extrapolation en  $p^{[4]}$  (points) et sélection des orbites “démocratiques” (croix).*

multipliant les opérateurs renormalisés en question. Dans le cas des fonctions de Green, notons d’ores et déjà que le terme dominant de ce développement asymptotique n’est autre que la contribution évaluée perturbativement ; nous vérifierons explicitement cette assertion dans la suite.

La technique du développement en produit d’opérateurs a été introduite par Wilson [Wil69] et justifiée par Zimmermann [Zim70] dans le cadre de la théorie des perturbations. Le problème de la renormalisation du développement en produit d’opérateurs est en fait exactement celui de la renormalisation des opérateurs composites. Au-delà de ces considérations techniques, l’utilisation du développement en produits d’opérateurs à des fins phénoménologiques provient du travail fondateur de Shifman, Vainshtein et Zakharov [SVZ78a], [SVZ78b], [SVZ78c] et [SVZ79] où les valeurs moyennes dans le vide (*non-perturbatif*) de QCD sont reliées à des quantités hadroniques. Le propos de leur réflexion était d’expliquer pourquoi les conséquences de la liberté asymptotique ne se manifestaient pas à la même échelle pour toutes les quantités hadroniques calculables.



## II.2.1 Calculs en arbre

### Démarche générale

Notre propos est de paramétrer des écarts non-perturbatifs au comportement perturbatif des fonctions de Green. Le problème est de donner un sens à la série de perturbations, divergente, et peut-être asymptotique à une fonction présentant un comportement en puissance. Ceci signifie que la définition de la contribution perturbative à une quantité est ambiguë.

Par conséquent, lorsque nous parlons de contribution perturbative, nous travaillons implicitement dans un *schéma de renormalisation donné* et à un *ordre de perturbation donné*. Les corrections non-perturbatives sont alors définies de manière relative, comme étant le complément de la théorie de perturbations à l'évaluation non-perturbative issue du réseau. Cette définition permet d'envisager plusieurs types de corrections en puissance si tant est que nous sommes capables d'identifier la puissance régissant leur évolution. Numériquement, nous verrons que cela impose de travailler sur une fenêtre en énergie suffisamment grande pour séparer une correction en puissance (sous-dominante) d'une évolution logarithmique, par essence très lente. Conceptuellement, ces définitions permettent de parler de vide perturbatif de manière précise : un élément de matrice T-produit d'opérateurs évalué entre deux états de vide perturbatif devient la contribution perturbative à la fonction de Green, évaluée à un certain ordre en perturbations, dans un certain schéma de renormalisation. De plus, ces définitions lèvent toute ambiguïté sur la définition de l'ordre normal.

Nous notons  $T$  le produit chronologique et  $:O:$  l'ordre normal d'un opérateur  $O$ , première renormalisation qui assure sa nullité dans le *vide perturbatif* noté  $\Omega$ . Formuler un développement en produits d'opérateurs en termes d'ordres normaux des opérateurs invoqués revient à ne prendre en compte que des contributions issues de diagrammes de Feynman connexes dans l'évaluation des coefficients du développement.

Le développement en produit d'opérateurs est une technique permettant de décrire le comportement à petit  $x$  du produit  $\Phi(0)\Phi(x)$  d'un opérateur  $\Phi$  de dimension massique  $n$  en écrivant un développement asymptotique

$$\Phi(0)\Phi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sum_O O(0)c_O(x) \quad (\text{II.20})$$

sur une base d'opérateurs *renormalisés*  $O$ . Il s'agit d'un raisonnement à petites distances, donc  $c_O(x)$  est évaluable perturbativement en QCD. Pour être précis, nous supposons que toute la partie non-perturbative de l'évolution de  $c_O(x)$  est rejetée dans l'opérateur  $O(0)$ , conformément à notre définition initiale. En général, nous nous intéressons plutôt à des quantités formulées en

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN

termes d'impulsions, donc nous calculons la transformée de Fourier de ce développement. Les opérateurs y intervenant étant locaux, il s'agit simplement de caractériser l'évolution de  $\tilde{c}_O(p)$ , où l'impulsion  $p$  est le paramètre de transformation de Fourier. Un argument dimensionnel nous assure alors que  $\tilde{c}_O(p)$  se comporte en  $1/p^{d-2n}$  à des corrections logarithmiques près si  $O$  est un opérateur de dimension de masse  $d$ .

La démarche d'écriture du développement peut de ce fait être inversée : nous utilisons une règle de comptage en puissance qui stipule que des corrections en  $1/p^2$  à une quantité adimensionnée telle que la constante de renormalisation du champ de jauge ou la constante de couplage forte évaluée par la méthode des fonctions de Green sont véhiculées par des opérateurs de dimension massique 2. Le calcul des  $\tilde{c}_O(p)$  est mené en insérant le développement (II.20) dans autant de fonctions de Green différentes qu'il y a de coefficients à déterminer. Par exemple, nous écrivons ainsi :

$$\langle 0|T(\Phi(z)\Phi(0)\Phi(x)\Phi(y))|0\rangle \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sum_O c_O(x) \langle 0|\Phi(z)O(0)\Phi(y)|0\rangle \quad (\text{II.21})$$

ou, en termes d'impulsions :

$$\langle 0|T(\tilde{\Phi}(q)\tilde{\Phi}(p)\tilde{\Phi}(-p)\tilde{\Phi}(q'))|0\rangle \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_O \tilde{c}_O(p) \langle 0|\tilde{\Phi}(q)O(0)\tilde{\Phi}(q')|0\rangle \quad (\text{II.22})$$

et évaluons en perturbation les diverses fonctions de Green apparaissant dans le développement. Un choix idoine des opérateurs  $\Phi(z)$  ou  $\Phi(y)$  (plus ou moins d'opérateurs peuvent être nécessaires) permet de calculer les différents coefficients  $\tilde{c}_O(p)$ . Le caractère asymptotique assure que l'insertion de la formule opératorielle (II.20) dans une fonction de Green ne "bouleverse" pas la valeur des  $\tilde{c}_O(p)$  : leur évaluation est locale, et peut être découplée du comportement des champs aux points  $y$  ou  $z$  dans la mesure où  $y$  et  $z$  restent loin de  $x$  et 0 pour reprendre l'exemple.

Insistons enfin sur le fait que les corrections à la théorie perturbative apportées par le développement en produit d'opérateurs prennent en compte le fait que le vide de la QCD n'est pas trivial, sans préjuger en quoi que ce soit de sa nature. La capacité du développement en produit d'opérateurs à absorber dans des éléments de matrice la non-trivialité du vide d'une théorie a été étudiée avec succès par Taylor et McClain [TM83] dans le cas de  $\lambda\phi^4$  avec brisure spontanée de la symétrie due à un terme de masse négatif. Bien que les effets non-perturbatifs de la QCD relèvent d'effets plus subtils, une croyance commune en l'applicabilité et la validité du développement en produits d'opérateurs demeure.

Nous voulons ici prendre en compte les premières corrections non-perturbatives à l'évolution perturbative des fonctions de Green gluoniques à deux et

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

trois points en jauge de Landau, i.e. notre but est de reproduire le comportement perturbatif assorti de corrections en puissance au moins aussi faibles que  $1/p^2$ . Désignons par  $\tilde{A}_\mu^a$  la transformée de Fourier du champ de jauge  $A_\mu^a$ . Les opérateurs de dimension massique au plus égale à deux envisageables sont l'identité  $\mathbb{I}$  et :

$$: A_\mu^a : \quad : c^a : \quad : \partial_\nu A_\mu^a : \quad : \bar{c}^a c^b : \quad : A_\mu^a c^b : \quad : A_\mu^a A_\nu^b : \quad : \partial_\mu c^a : \quad : \bar{c}^a \bar{c}^b : \quad : c^a c^b : \quad (II.23)$$

Le fait que des opérateurs qui dépendent de la jauge puissent intervenir dans le développement en produit d'opérateurs de fonction de Green a été remarqué par Lavelle et al. dès 1992 [LO92] et [Ahl92].

Afin d'alléger les écritures des développements en produits d'opérateurs des fonctions de Green à deux et trois points, anticipons sur la suite et cherchons les opérateurs qui vont contribuer à l'analyse asymptotique des valeurs moyennes dans le vide (non-perturbatif) de ces opérateurs. De manière générale, les fantômes ne peuvent apparaître que dans les lignes internes des diagrammes de Feynman, mais pas dans les pattes externes, et le nombre de fantômes doit demeurer nul. Si nous nous attachons aux développements des fonctions de Green comportant uniquement des champs de jauge, il ne peut subsister aucun opérateur portant des fantômes, si ce n'est peut-être  $\bar{c}^a c^b$ . Or, en jauge de Landau, le condensat  $\langle \bar{c}^a c^b \rangle$  se découple des fonctions de Green purement gluoniques, ainsi que le montre le calcul perturbatif du coefficient de Wilson associé à ce condensat [LO92]. Par conséquent, nous ne prendrons en compte aucun opérateur comportant des fantômes.

Toujours en considérant de telles fonctions de Green, les opérateurs  $: \partial_\nu A_\mu^a :$  et  $: A_\mu^a :$  vont contribuer "sandwichés" ou bien entre deux états de vide (perturbatif ou non), ou bien entre deux champs de jauge. Ces éléments de matrice sont nuls pour l'opérateur  $: A_\mu^a :$  car le vide est invariant de Lorentz. Pour la même raison, les éléments de matrice correspondants de l'opérateur  $: \partial_\nu A_\mu^a :$  sont nuls, à moins que  $\nu = \mu$ , i.e. que nous prenions l'opérateur  $: \partial_\mu A_\mu^a :$ . Mais alors ce dernier est nul pour une autre raison, qui est que le développement en produit d'opérateurs que nous écrivons a lieu en jauge de Landau. Notons toutefois que l'opérateur  $: A_\mu^a :$  "sandwiché" entre un champ de jauge et un état de vide (perturbatif ou non) apporte une contribution non-nulle au développement en produit d'opérateurs ; nous nous en servons dans l'étude du vertex asymétrique.

Ainsi, seuls les opérateurs  $\mathbb{I}$ ,  $: A_\mu^a :$  et  $: A_\mu^a A_\nu^b :$  peuvent apparaître dans le développement asymptotique de fonctions de Green ne comportant que des champs de jauge, en se limitant bien sûr au premier ordre de corrections non-perturbatives. Nous verrons que ce lot de fonctions de Green est exactement suffisant pour calculer les coefficients des opérateurs considérés. En particulier,

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN

nous obtiendrons le comportement asymptotique de la constante de couplage et du propagateur du gluon (dans le vide non-perturbatif).

Exceptionnellement, les calculs analytiques des coefficients des développements en produits d'opérateurs seront décrits pour un groupe de jauge  $SU(N)$ , ce qui permet de repérer aisément les facteurs constants issus des contractions de tenseurs nécessaires à l'extraction de facteurs de forme.

Nous traitons d'abord l'analyse en terme de développement en produit d'opérateurs du propagateur du gluon de manière très détaillée. Les deux autres cas (vertex symétrique et asymétrique) seront décrits plus rapidement, en soulignant simplement les différences essentielles.

### Propagateur du gluon

Sans tenir compte des corrections radiatives, le développement en produit d'opérateurs du propagateur du gluon s'écrit<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} T(\tilde{A}_\mu^a(-p)\tilde{A}_\nu^b(p)) &= (c_0)_{\mu\nu}^{ab}(p)\mathbb{I} \\ &+ (c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p) : A_{\mu'}^{a'}(0)A_{\nu'}^{b'}(0) : + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Le vide de QCD en jauge de Landau demeure invariant de jauge globale. Notons qu'il doit aussi être invariant de Lorentz. Dès lors la seule composante du tenseur  $A_{\mu'}^{a'}(0)A_{\nu'}^{b'}(0)$  qui va pouvoir apporter une contribution non-nulle entre deux états de vide est celle vérifiant  $a' = b'$  et  $\mu' = \nu'$ . En jauge de Landau, nous savons donc que :

$$\langle 0 | : A_{\mu'}^{a'}(0)A_{\nu'}^{b'}(0) : | 0 \rangle \propto \delta^{a'b'} \delta_{\mu'\nu'} \quad (\text{II.25})$$

Le facteur de proportionnalité  $K$  vérifie :

$$\delta^{a'b'} \left( \delta_{\mu'\nu'} - \frac{p'_\mu p'_\nu}{p^2} \right) \langle 0 | : A_{\mu'}^{a'}(0)A_{\nu'}^{b'}(0) : | 0 \rangle = 4(N^2 - 1) \langle A^2 \rangle K \quad (\text{II.26})$$

où nous notons  $\langle A^2 \rangle$  la valeur moyenne dans le *vide non-perturbatif*  $|0\rangle$  de l'opérateur  $A^2 = \sum_{a,\mu} A_\mu^a A_\mu^a$ . Rappelons que  $\langle \Omega | : A_{\mu'}^{a'} : | \Omega \rangle$  et  $\langle \Omega | : A_{\mu'}^{a'}(0)A_{\nu'}^{b'}(0) : | \Omega \rangle$  sont nuls par définition même de l'ordre normal; nous retrouvons ainsi aisément que le terme dominant du développement en produit d'opérateurs des fonctions de Green n'est autre que l'évaluation perturbative usuelle.

---

1. Il s'agit ici d'un abus : en fait, nous n'écrivons ici que les opérateurs qui vont contribuer dans le vide non-perturbatif, sachant que les fonctions de Green qui vont être utilisées pour les évaluer ne portent pas de contributions des autres opérateurs que nous aurions pu considérer sur des critères dimensionnels, ainsi que nous venons de le montrer.

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

À présent, raisonnons dimensionnellement en termes d'unités de masse : le membre de gauche de l'équation (II.24) a une dimension<sup>2</sup> -2, si bien que le premier terme de correction au comportement perturbatif est une correction en puissance en  $\frac{1}{p^4}$  dans (II.24). Ces corrections en puissance sont portées par un condensat  $\langle A^2 \rangle$  non-invariant de jauge.

Ce condensat n'a aucune raison de s'annuler car les fonctions de Green dépendent elles aussi de la jauge. Par contre, ce condensat est invariant BRST, et en tant que tel est autorisé par les propriétés de symétrie de la théorie, et donc *doit apparaître* dans le développement en produit d'opérateurs des quantités considérées. Nous pouvons nous en convaincre en disant que la renormalisation des opérateurs locaux provoque un mélange entre opérateurs ayant les mêmes nombres quantiques, i.e. les mêmes propriétés de symétrie. De ce point de vue-là, la présence de tous les opérateurs possédant la symétrie BRST est nécessaire dans le développement d'une fonction de Green. Il faut toutefois s'assurer que cette invariance par symétrie survit à la renormalisation. Bien que nous puissions nous en assurer immédiatement [Kon01a], nous reviendrons sur ce point dans la SEC. II.4.2.

Par simplicité, nous écrirons communément  $\langle g|T(\tilde{A}_\mu^a(-p)\tilde{A}_\nu^b(p))|g\rangle$ , où  $|g\rangle$  désigne un "état" à un gluon mou, pour  $\langle 0|T(\tilde{A}_\tau^t(0)\tilde{A}_\mu^a(-p)\tilde{A}_\nu^b(p)\tilde{A}_\sigma^s(0))|0\rangle$ , bien que la notion d'état à un gluon  $|g\rangle$  soit loin d'être claire<sup>3</sup>!

Nous avons donc vu que :

$$\langle 0| : \partial_\nu A_\mu^a : |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle g| : \partial_\nu A_\mu^a : |g\rangle = 0 \quad (\text{II.27})$$

Dans ces conditions, nous écrivons l'évaluation asymptotique du propagateur du gluon sous la forme :

$$\langle 0|T(\tilde{A}_\mu^a(-p)\tilde{A}_\nu^b(p))|0\rangle = (c_0)^{ab}_{\mu\nu}(p^2) + (c_2)^{ab\mu'\nu'}_{\mu\nu a'b'}\delta^{a'b'}\delta_{\mu'\nu'}\frac{\langle A^2 \rangle}{4(N^2 - 1)} \quad (\text{II.28})$$

Le propagateur du gluon est connu en général jusqu'à l'ordre trois dans les schémas de renormalisation MOM,  $\overline{\text{MOM}}$  et  $\overline{\text{MS}}$ . Il reste à déterminer la constante  $c_2$ .

Évaluons  $c_2$  au logarithme dominant. La contribution diagrammatique du membre de gauche de (II.24) comporte les graphes du TAB. II.2. La contribution diagrammatique du membre de droite de (II.24) est constituée des graphes du TAB. II.3.

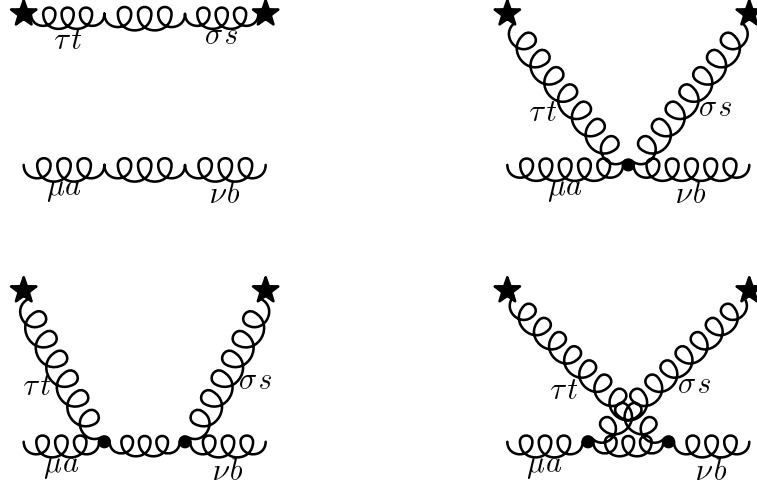
Si nous nous restreignons aux contributions des diagrammes connexes, et si nous enlevons la partie perturbative,  $c_2$  est essentiellement déterminée par

---

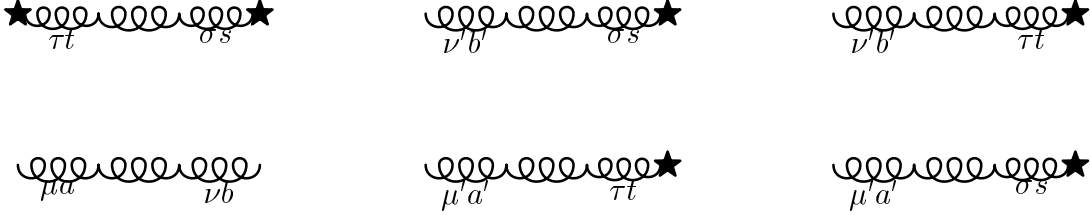
2. Précisément,  $\tilde{A}_\mu^a(q)\tilde{A}_\nu^b(p) = \tilde{A}_\mu^a(-p)\tilde{A}_\nu^b(p)\delta^{(4)}(p+q)$  a une dimension -6, et nous laissons de côté le  $\delta^{(4)}$  dans cette discussion.

3. Il est en particulier illicite de parler d'état asymptotique à un gluon.

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN



TAB. II.2 –: Membre de gauche de (II.24) “sandwiché” entre deux gluons mous évalué au logarithme dominant. L’étoile repère les propagateurs des gluons mous.



TAB. II.3 –: Membre de droite de (II.24) “sandwiché” entre deux gluons mous évalué au logarithme dominant. L’étoile repère les propagateurs des gluons mous.



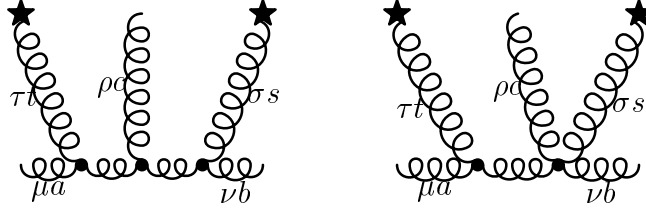
TAB. II.4 –: Contributions de  $A^2$  au propagateur du gluon.

le quotient des diagrammes du TAB. II.4. L’étoile aux pattes des gluons mous représente l’opérateur  $A^2$ . Les pattes molles sont amputées.

Nous en déduisons la valeur de  $c_2$  au logarithme dominant :

$$(c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'} = \frac{1}{2} \frac{\langle 0 | \tilde{A}_\tau^t(0) \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \tilde{A}_\sigma^s(0) | 0 \rangle_{\text{connexe}}}{(G_{\text{pert}}^{(2)}(0))_{\tau\mu'}^{ta'} (G_{\text{pert}}^{(2)}(0))_{\sigma\nu'}^{sb'}} \quad (\text{II.29})$$

Finalement, l’évolution à grande impulsion  $p$  du propagateur du gluon renor-


 TAB. II.5 –: Contributions de  $A^2$  au vertex gluonique symétrique à 3 points.

malisé est donnée par :

$$p^2 G_{\text{R}}^{(2)}(p^2; \mu^2) = p^2 G_{\text{R,pert}}^{(2)}(p^2; \mu^2) + 12\pi\alpha_s \frac{\langle A^2 \rangle_{\text{R}, \mu^2}}{4(N^2 - 1)} \quad (\text{II.30})$$

### Vertex symétrique et $\alpha_s$ symétrique

Le développement en produit d'opérateurs du vertex symétrique s'écrit, au niveau en arbre :

$$\begin{aligned} T(\tilde{A}_\mu^a(p_1) \tilde{A}_\nu^b(p_2) \tilde{A}_\rho^c(p_3)) &= (d_0)_{\mu\nu\rho}^{abc}(p_1, p_2, p_3) \mathbb{I} + (d_1)_{\mu\nu\rho a'}^{abc\mu'}(p_1, p_2, p_3) : A_{\mu'}^{a'}(0) : \\ &+ (d_2)_{\mu\nu\rho a'b'}^{abc\mu'\nu'}(p_1, p_2, p_3) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Le même raisonnement dimensionnel que précédemment stipule que le membre de gauche de l'équation (II.31) a une dimension -9; le terme de correction non-perturbative est donc une correction en puissance en  $\frac{1}{p^6}$ , là encore portée par  $\langle A^2 \rangle$ .

Les coefficients du développement sont de nouveau évalués après calcul des fonctions de Green “sandwichées” entre deux états de vide ou deux états à un gluon mou. Le terme  $d_0$  correspond à l'évolution perturbative de la fonction de Green gluonique à trois points.

Les diagrammes connexes intervenant dans le calcul des coefficients sont essentiellement ceux du TAB. II.5.

Nous définissons  $g_{\text{R}}$  comme le vertex à trois gluon renormalisé, divisé par le propagateur du gluon, lui aussi renormalisé. Ainsi :

$$g_{\text{R}}(p^2) = \frac{G^{(3)}(p^2, p^2, p^2)}{(G^{(2)}(p^2))^3} Z_3(p^2)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{II.32})$$

### Vertex asymétrique et $\alpha_s$ asymétrique

Le vertex asymétrique possédant une patte molle, la discussion est ici un peu plus délicate. Nous soulignons les points essentiellement différents, et ren-

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN

voyons à [SRQ01] pour davantage de détails. Le principe du calcul repose toujours sur le développement en produit d'opérateurs, mais cette fois en ayant recours à une hypothèse de factorisation ou d'insertion du vide, hypothèse dont la validité reposera sur la confrontation aux données réseau. Précisons cependant d'ores et déjà que nous extrayons le facteur de forme  $G^{(3)}$  selon :

$$G^{(3)}(p^2) = \frac{1}{6N(N^2 - 1)p^2} p_\rho \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) f^{abc} \langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \tilde{A}_\rho^c(0) \rangle \quad (\text{II.33})$$

Le développement du propagateur du gluon s'écrit <sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} T(\tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p)) &= (c_0)_{\mu\nu}^{ab}(p) \mathbb{I} + (c_1)_{\mu\nu a'}^{ab\mu'}(p) : A_{\mu'}^{a'}(0) : \\ &+ (c_2)_{\mu\nu a' b'}^{ab\mu' \nu'}(p) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \\ &+ (c_2')_{\mu\nu a' b'}^{ab\mu' \nu'}(p) : \partial_{\mu'} A_{\nu'}^{b'}(0) : \\ &+ (c_3)_{\mu\nu a' b' c'}^{ab\mu' \nu' \rho'}(p) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \\ &+ (c_3')_{\mu\nu a' b' c'}^{ab\mu' \nu' \rho'}(p) : \partial_{\mu'} A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Nous calculons  $\langle 0 | T(\tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \tilde{A}_\rho^c(0)) | 0 \rangle$  sous la forme  $\langle 0 | T(\tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p)) | g_\rho^c \rangle$ . Ceci signifie en particulier que :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p)) | g_\rho^c \rangle &= (c_1)_{\mu\nu a'}^{ab\mu'}(p) \langle 0 | : A_{\mu'}^{a'}(0) : | g_\rho^c \rangle \\ &+ (c_3)_{\mu\nu a' b' c'}^{abc\mu' \nu' \rho'}(p) \langle 0 | : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) | g_\rho^c \rangle \\ &+ (c_3')_{\mu\nu a' b' c'}^{abc\mu' \nu' \rho'}(p) \langle 0 | : \partial_{\mu'} A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) | g_\rho^c \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

L'hypothèse que nous rajoutons alors consiste à insérer le vide non-perturbatif entre un champ de gluon et les autres apparaissant dans un élément de matrice. Nous remplaçons ainsi :

$$\langle 0 | : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : | g_\rho^c \rangle_{\text{R},\mu} \quad \text{par} \quad \frac{\langle A^2(\mu^2) \rangle (G^{(2)})_{\tau\rho}^{tc}(0, \mu^2)}{4(N^2 - 1)} \mathcal{T}_{\mu' \nu' \rho' t}^{a' b' c' \tau} \quad (\text{II.36})$$

où  $\mathcal{T}$  est un tenseur qui sert juste à contracter les champs selon la position de l'insertion, et que nous n'explicitons pas.

Cette hypothèse de factorisation a une autre conséquence immédiate : en jauge de Landau, les termes dérivatifs vont disparaître du second membre de l'OPE (II.35) lors du remplacement de :

$$\langle 0 | : \partial_{\mu'} A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : | g_\rho^c \rangle \quad \text{par} \quad \langle 0 | : \partial_{\mu'} A_{\nu'}^{b'}(0) : (G^{(2)})_{\tau\rho}^{tc}(0, \mu^2) | 0 \rangle \quad (\text{II.37})$$

---

4. Ceci est vrai aux termes contenant les fantômes près.



Par suite, l'OPE du vertex asymétrique est décrite par les termes en  $c_1$  et  $c_3$ . Avant de détailler l'effet des fluctuations quantiques au logarithme dominant sur la partie de correction en puissance, notons que  $c_3 = 3g$  au niveau en arbre.  $c_1$  est la contribution perturbative au vertex asymétrique.

## II.2.2 Calculs perturbatifs des coefficients de Wilson

Nous commençons par évaluer les dimensions anormales des opérateurs  $A^2$  et  $A^3$ . L'opérateur  $A^2$  joue un rôle central dans cet exposé, et nous aurons l'occasion dans la SEC. II.4 d'utiliser à nouveau la dimension anormale de cet opérateur. Par contre, l'opérateur  $A^3$  occupe une part plus marginale, et nous nous contentons de préciser le résultat du calcul.

### Dimension anormale de l'opérateur $A^2$

Nous rappelons le calcul présenté dans [Bou01a]. Nous cherchons la dimension anormale de l'opérateur  $A^2$  au logarithme dominant. A cet ordre, elle est commune à tous les schémas de renormalisation, donc le calcul peut être mené en  $\overline{\text{MS}}$ . Cependant, la régularisation dimensionnelle mélange les divergences infra-rouge et ultra-violettes, qui doivent être séparées pour notre calcul. Nous y parvenons en donnant un flot non-nul  $-2q$  à l'opérateur  $A^2$ , comme indiqué sur les diagrammes nécessaires au calcul TAB. II.6. Les diagrammes de gauche et droite ont des structures tensorielles  $(\Gamma_g)_{ab}^{\mu\nu}$  et  $(\Gamma_d)_{ab}^{\mu\nu}$  vérifiant :

$$(\Gamma_g)_{ab}^{\mu\nu}(q) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \delta_{ab} \left( \frac{1}{\epsilon} 3N \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots \right) \quad (\text{II.38})$$

$$(\Gamma_d)_{ab}^{\mu\nu}(q) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \delta_{ab} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{-9N}{2} \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots \right) \quad (\text{II.39})$$

Le diagramme de gauche a un facteur combinatoire supplémentaire valant 2. Ces diagrammes donnent l'élément de matrice  $\langle g_\mu^a | A^2 | g_\nu^b \rangle$  qu'il convient d'amputer afin d'obtenir la dimension anormale de l'opérateur  $A^2$ . Tous calculs fait, il vient :

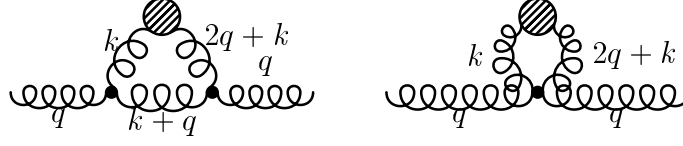
$$\gamma_{A^2}(\alpha_s(\mu^2)) = -\frac{35N}{12} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s(\mu^2)) \quad (\text{II.40})$$

Afin d'alléger les notations, nous posons  $\hat{Z} = Z_3^{-1} Z_{A^2}$  et  $\hat{\gamma} = \gamma_{A^2} - \gamma_3$ . De manière standard (ANNEXE A), nous notons enfin :

$$\hat{\gamma}(\alpha_s(\mu^2)) = -\hat{\gamma}_0 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} + \dots = -\frac{3N}{4} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} + \dots \quad (\text{II.41})$$

en vertu du calcul de la dimension anormale de  $A^2$ .

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN



TAB. II.6 –: Diagrammes donnant la dimension anormale de  $A^2$  à une boucle. La régularisation de la divergence infra-rouge s'opère en insérant  $A^2$  (représenté par la boule colorée) à l'impulsion  $-2q$ .

### Dimension anormale de l'opérateur $A^3$

De manière tout-à-fait précise, nous n'avons pas spécifiquement besoin de la dimension anormale de  $A^3$ , mais plutôt de l'évolution logarithmique de l'élément de matrice  $\langle g | : A^3 : \tilde{A}(0) | g \rangle$ . Nous notons  $\bar{\gamma}$  la dimension anormale associée à la constante de renormalisation  $\bar{Z} = Z_{A^3} Z_3^{-3/2}$  de l'opérateur considéré, apparaissant après insertion du vide dans les opérateurs du développement en produit d'opérateurs. Nous écrivons :

$$\bar{\gamma}(\alpha_s(\mu^2)) = -\bar{\gamma}_0 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} + \dots = -\frac{93N}{136} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} + \dots \quad (\text{II.42})$$

le début de son développement perturbatif. Nous renvoyons à [SRQ01] pour le détail de l'évaluation et les diagrammes pris en compte dans les calculs.

### Propagateur du gluon

Une condition de renormalisation de type MOM sur le propagateur du gluon est :

$$G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) = 1 \quad \text{à} \quad p^2 = \mu^2 \quad (\text{II.43})$$

si bien que le propagateur renormalisé vérifie :

$$p^2 G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) = \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G^{(2)}(\mu^2)} \quad (\text{II.44})$$

La constante de renormalisation  $Z_3(\mu^2)$  (cf ANNEXE A) du champ de jauge dans le schéma MOM est alors :

$$Z_3(\mu^2) = \mu^2 G^{(2)}(\mu^2) \quad (\text{II.45})$$

et nous posons aussi :

$$Z_3^{\text{pert}}(\mu^2) = \mu^2 G_{\text{pert}}^{(2)}(\mu^2) \quad (\text{II.46})$$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Introduisons la dépendance en l'échelle de renormalisation des coefficients de Wilson apparus dans le développement en produit d'opérateurs du propagateur du gluon en écrivant :

$$p^2 G_{\text{R}}^{(2)}(p^2; \mu^2) = c_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) + c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) \frac{\langle A^2(\mu^2) \rangle_{\text{R}}}{4(N^2 - 1)} \frac{1}{p^2} \quad (\text{II.47})$$

Avec ces notations, nous avons :

$$c_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = \frac{Z_3^{\text{pert}}(p^2)}{Z_3(\mu^2)} \quad \text{et} \quad c_0(1, \alpha_S(\mu^2)) = \frac{Z_3^{\text{pert}}(\mu^2)}{Z_3(\mu^2)} \quad (\text{II.48})$$

Par suite, l'évolution de  $c_0$  en fonction de  $p$  est donnée par :

$$c_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = c_0(1, \alpha_S(\mu^2)) \frac{Z_3^{\text{pert}}(p^2)}{Z_3^{\text{pert}}(\mu^2)} \quad (\text{II.49})$$

ce qui lie l'évolution de  $c_0$  au calcul perturbatif de la dimension anormale du champ de jauge. Notons par ailleurs la condition de bord  $c_0(1, \alpha_S(\mu)) = 1 + \mathcal{O}(1/\mu^2)$ . De plus, (II.30) stipule que  $c_2(1, \alpha_S(p^2)) = 12\pi\alpha_S(p^2)$  à des termes sous-dominants en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log p/\Lambda_{\text{QCD}}}\right)$  près.

L'identification des dépendances en l'échelle de renormalisation  $\mu$  dans la version renormalisée de (II.29) montre que  $Z_3(\mu^2)Z_{A^2}(\mu)^{-1}c_2\left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu)\right)$  est indépendant de  $\mu$ .  $c_2$  vérifie donc l'équation du groupe de renormalisation suivante :

$$\left\{ -2\gamma_{A^2}(\alpha_S(\mu^2)) + 2\gamma_3(\alpha_S(\mu^2)) + \frac{\partial}{\partial \log \mu} + \beta(\alpha_S(\mu^2)) \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \right\} c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = 0 \quad (\text{II.50})$$

L'évolution de  $c_2$  au logarithme dominant est alors :

$$c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = c_2(1, \alpha_S(p)) \left( \frac{\alpha_S(p^2)}{\alpha_S(\mu^2)} \right)^{-\frac{\gamma_0}{\beta_0}} \quad (\text{II.51})$$

et donc :

$$\frac{c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right)}{c_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right)} = \frac{6\pi^2}{\beta_0(N^2 - 1)} \left( \log \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^{-\frac{\gamma_0 + \hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \left( \log \frac{p}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^{\frac{\gamma_0 + \hat{\gamma}_0}{\beta_0} - 1} \quad (\text{II.52})$$

## II.2. OPE DES FONCTIONS DE GREEN

### Vertex symétrique et $\alpha_S$ symétrique

De même que dans le cas du propagateur du gluon, nous savons que le vertex à trois gluons se comporte à grand  $p$  en :

$$p^6 G_R^{(3)}(p^2; \mu^2) = d_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) + d_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) \frac{\langle A^2(\mu^2) \rangle_R}{4(N^2 - 1)} \frac{1}{p^2} \quad (\text{II.53})$$

La condition de bord est  $d_2(1, \alpha_S(\mu^2)) = 9g^3$ , et  $d_2$  vérifie l'équation de groupe de renormalisation suivante :

$$\left\{ -2\hat{\gamma}(\alpha_S(\mu^2)) + \gamma_3(\alpha_S(\mu^2)) + \frac{\partial}{\partial \log \mu} + \beta(\alpha_S(\mu^2)) \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \right\} d_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = 0 \quad (\text{II.54})$$

L'évolution de  $d_2$  au logarithme dominant est donc :

$$d_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = 9g_R^3(p^2) \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log p / \Lambda_{\text{QCD}}} \right) \right) \quad (\text{II.55})$$

Par conséquent, dans le schéma de renormalisation MOM, avec une correction en puissance prise au logarithme dominant, le flot de la constante de couplage de la QCD sous le groupe de renormalisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha_S^{\text{MOM}}(p^2) &= \alpha_S^{\text{MOM}}{}_{\text{pert}}(p^2) \left( 1 + \frac{18\pi^2}{\beta_0(N^2 - 1)} + \left( \log \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^{-\frac{\gamma_0 + \hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \right. \\ &\quad \left. \left( \log \frac{p}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^{-\frac{\gamma_0 + \hat{\gamma}_0}{\beta_0} - 1} \frac{\langle A^2(\mu^2) \rangle_R}{p^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

### Vertex asymétrique et $\alpha_S$ asymétrique

Le vertex asymétrique va s'écrire en fonction des coefficients  $c_1$  et  $c_3$  définis dans (II.34), alors que le propagateur du gluon s'exprime en fonction de  $c_0$  et  $c_2$ . Ces deux derniers sont donc déjà connus; il suffit simplement de veiller à écrire le développement perturbatif en  $\alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}}$ .  $c_3$  vérifie l'équation de groupe de renormalisation suivante :

$$\left\{ -2\bar{\gamma}(\alpha_S(\mu^2)) - \gamma_3(\alpha_S(\mu^2)) + \frac{\partial}{\partial \log \mu} + \beta(\alpha_S(\mu^2)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} c_3 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = 0 \quad (\text{II.57})$$

La solution de cette équation est :

$$c_3 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha_S(\mu^2) \right) = c_3(1, \alpha_S(p^2)) \left( \frac{\alpha_S(p^2)}{\alpha_S(\mu^2)} \right)^{-\frac{2\bar{\gamma}_0 + \gamma_0}{2\beta_0}} \quad (\text{II.58})$$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Notons enfin la condition au bord :

$$c_3(1, \alpha_S(p^2)) = 3g_R^3(p) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log \frac{p}{\Lambda_{\text{QCD}}}}\right) \quad (\text{II.59})$$

Sous ces hypothèses, le flot de la constante de couplage sous le groupe de renormalisation s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}}(p^2) &= \alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}_{\text{pert}}}(p^2) \left[ 1 + \frac{6\pi^2}{\beta_0} \frac{\langle A^2(\mu^2) \rangle}{N^2 - 1} \left( \log \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^{-\frac{\gamma_0 + \gamma_0}{\beta_0}} \right. \\ &\quad \left. \left( \log \frac{p}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^{\frac{\gamma_0 - \gamma_0}{\beta_0} - 1} \left( 2 \left[ \frac{\log \frac{p}{\Lambda_{\text{QCD}}}}{\log \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}} \right]^{\frac{\gamma_0 - \gamma_0}{\beta_0}} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

### II.3 Analyse des données

Nous disposons a priori de trois séries de données : propagateur du gluon, vertex à trois gluons et constante de couplage, et deux de ces trois séries peuvent être considérées comme indépendantes. Notre exigence est double :

- Nous voulons reproduire les données sur une grande fenêtre en énergie, entre une zone clairement perturbative et la région où sont attendus les premiers effets non-perturbatifs.
- Nous voulons décrire l'ensemble des données produites au sein d'un même cadre conceptuel.

De ce point de vue-là, si nous ne retenons que la constante de couplage et le propagateur du gluon, nous allons “fitter” deux estimations du condensat  $\langle A^2 \rangle$  qui doivent être compatibles dans les barres d'erreurs. Nous les noterons  $\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}}$  et  $\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\alpha_S}$  renormalisés à l'échelle  $\mu_0$ . Leur compatibilité est un test fort de l'analyse en termes de développement en produit d'opérateurs.

#### II.3.1 Données “quenched”

L'analyse exposée dans cette section a été effectuée par le groupe X - Orsay avant le début de la présente thèse.

De nombreuses études se sont déjà proposées de déterminer  $\alpha_S$  de manière non-perturbative dans l'approximation “quenched” ; parmi les ingrédients théoriques utilisés, mentionnons notamment la Fonctionnelle de Schrödinger [Lue94], le potentiel de quark lourd [BS92], la boucle de Wilson [LM92], la boucle de Polyakov [Div94] et le vertex à trois gluons [All96a] et [All96b].

### II.3. ANALYSE DES DONNÉES

$\beta$	$a^{-1}$ (GeV)	Volumes
6,0	1,966	$16^4, 24^4$
6,2	2,75	$16^4, 24^4, 32^4$
6,4	3,664	$16^4, 24^4, 32^4$
6,8	6,0	$16^4, 24^4$

TAB. II.7 –: *Données “quenched” produites.*

Les données “quenched” ont été engendrées par lot de 1000 configurations, sur plusieurs volumes afin de tester la dépendance des données en le volume du réseau, information récapitulée TAB. II.7.

Les valeurs des différentes mailles sont aujourd’hui très bien connues pour les calculs “quenched”, notamment depuis [BS92]. Un premier point tout-à-fait remarquable est que toutes les données calculées sur des réseaux de mailles de plus en plus fines s’ajustent parfaitement sur une même courbe lisse comme nous le voyons sur la FIG. II.4. Ceci montre que les artefacts de maille finie sont totalement absents de l’évaluation de  $\alpha_S$ , même dans la précision statistique élevée obtenue.

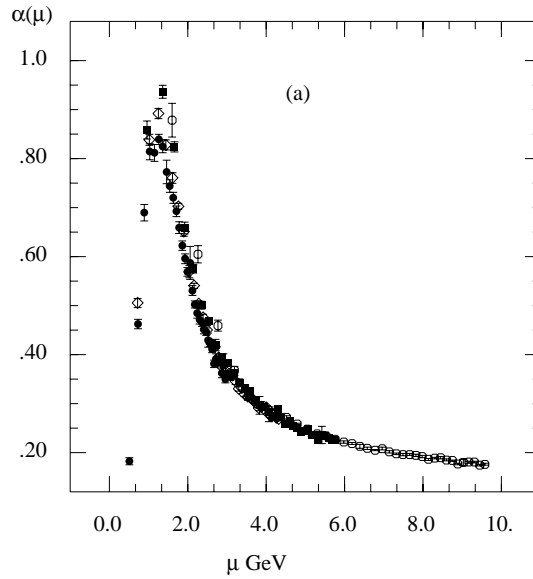


FIG. II.4 –: *Evaluations de  $\alpha_S^{\widetilde{MOM}}$  issues des réseaux à  $\beta \in \{6,0; 6,2; 6,4; 6,8\}$  sur des volumes  $24^4$ .*

Le fit des fonctions de Green avec les parties perturbatives évaluées à deux boucles conduit à un violent désaccord entre les valeurs  $\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}}$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

et  $\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}}$  renormalisées à l'échelle  $\mu_0 = 10 \text{ GeV}$ .

$$\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}} = 2,69 \text{ (58) GeV}^2 \quad \text{et} \quad \langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}} = 9,6 \text{ (1,9) GeV}^2 \quad (\text{II.61})$$

d'où :

$$\frac{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}}}{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}}} = 3,57 \text{ (15)} \quad (\text{II.62})$$

avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} = 1,1$  pour le fit combiné.

Les choses s'améliorent significativement en prenant les formules perturbatives à trois boucles :

$$\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}} = 2,40 \text{ (52) GeV}^2 \quad \text{et} \quad \langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}} = 3,6 \text{ (1,1) GeV}^2 \quad (\text{II.63})$$

d'où :

$$\frac{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}}}{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}}} = 1,50 \text{ (44)} \quad (\text{II.64})$$

avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} = 1,2$  pour le fit combiné de la FIG. II.5. Cette valeur aboutit à la prédiction :

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=0} = 233 \text{ (28) MeV} \quad (\text{II.65})$$

en très bon accord avec l'estimation du groupe ALPHA [SW02]  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=0} = 238 \text{ (19) MeV}$ .

Le désaccord entre les résultats à deux et trois boucles n'est pas étonnant ; il rappelle que la correction en puissance est sous-dominante face au terme perturbatif. Ce dernier doit donc être stable pour fournir une estimation raisonnable du terme non-perturbatif.

Enfin, le comportement asymptotique de  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  plaide de manière inambigüe pour une présence de corrections en puissance, ainsi que le montre la FIG. II.6.

Les résultats sont un peu similaires pour le vertex asymétrique. L'utilisation d'une formule perturbative à deux boucles conduit à :

$$\frac{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}}}{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}}} = 13,3 \text{ (3,7)} \quad (\text{II.66})$$

avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} = 1,95$  pour le fit combiné, tandis que le recours à la perturbation à trois boucles donne :

$$\frac{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{as}}}{\langle A^2(\mu_0^2) \rangle^{\text{propag}}} = 2,9 \text{ (1,0)} \quad (\text{II.67})$$

Cette dernière valeur conduit à :

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=0} = 260 \text{ (18) MeV} \quad (\text{II.68})$$

### II.3. ANALYSE DES DONNÉES

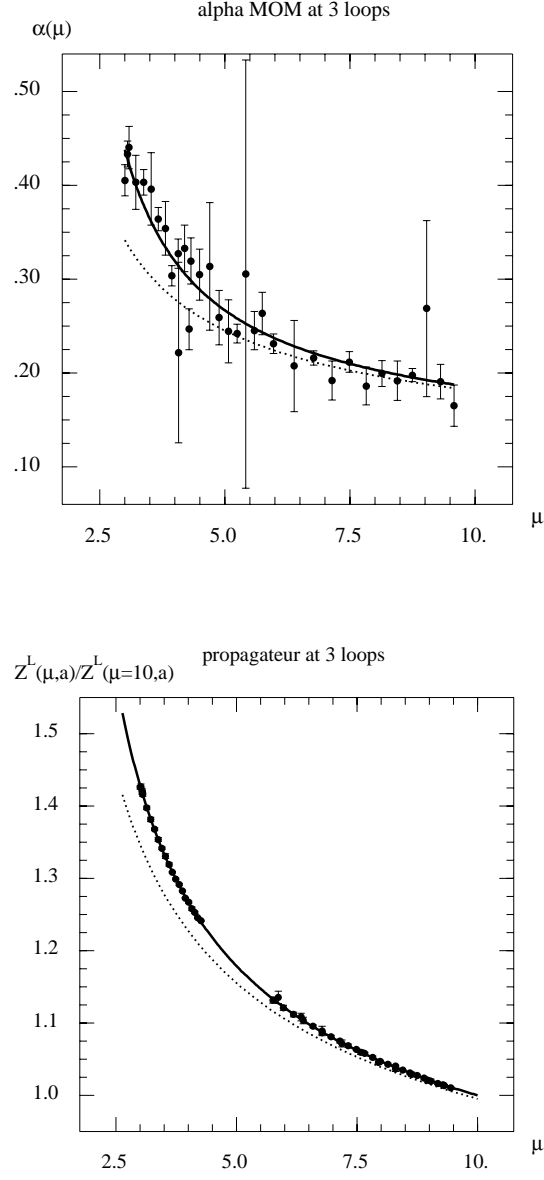


FIG. II.5 –: *Fits combinés du propagateur du gluon renormalisé à 10 GeV et  $\alpha_S^{MOM}$  sur la fenêtre [2,5 GeV; 10 GeV]. La courbe en pointillés représente la partie perturbative.*



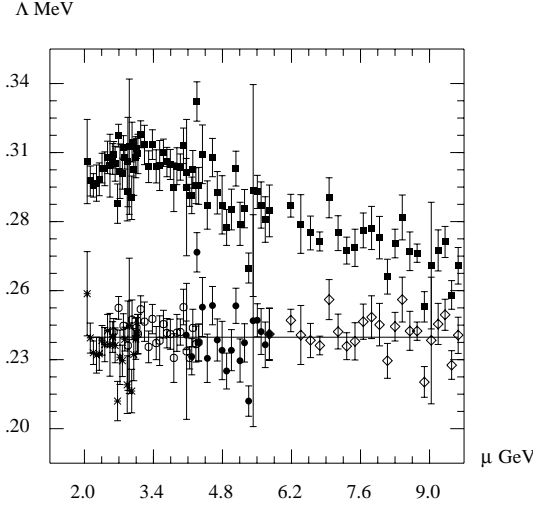


FIG. II.6 –: *Evaluations de  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  issues des réseaux à  $\beta \in \{6,0; 6,2; 6,4; 6,8\}$  sur des volumes  $24^4$  avec (au-dessous) et sans (en-dessus) correction en puissance.  $\Lambda^{\text{eff}}(\mu^2)$  est obtenu à partir de  $\alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}}$ .*

avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} = 1,18$ . Cette estimation est à  $1,5 \sigma$  de la valeur extraite du vertex symétrique. L'accord entre les deux estimations du condensat est aussi moins bonne. Cependant, nous avons rajouté une hypothèse que nous ne savons pas précisément contrôler. Une tentative d'estimation du biais induit par cette méthode consiste à paramétrer l'équation (II.60) en laissant libre la quantité  $r = 1 - \frac{\gamma_0 - \hat{\gamma}_0}{\beta_0}$  décrivant l'évolution logarithmique de la correction en puissance. En effet, considérant comme acquise [Bou00b] la présence de corrections en puissance à  $\alpha_S^{\widetilde{\text{MOM}}}$ , nous pouvons chercher le comportement logarithmique de cette correction, i.e. “fitter” les données en essayant de trouver la valeur optimale de  $r$  reproduisant le signal. La FIG. II.7 montre que l'approximation est raisonnablement bonne, même si elle n'est pas optimale. Nous considérons que ce résultat suggère la validité de l'analyse en développement en produit d'opérateurs pour le vertex asymétrique.

### II.3.2 Données “unquenched”

Les premiers calculs de  $\alpha_S$  avec des fermions dynamiques relativistes sont très récents, et ont été entrepris par les collaborations UKQCD-QCDSF [Boo01] et ALPHA [Cap99]. Les précédents calculs avec quarks dynamiques se faisaient dans le cadre de la QCD non-relativiste, NRQCD [EK96], [Dav97], [Spi99]. Les premiers résultats phénoménologiques avec deux saveurs de fer-

### II.3. ANALYSE DES DONNÉES

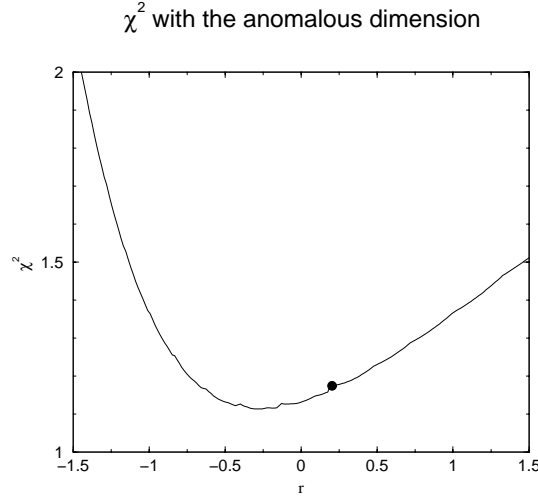


FIG. II.7 –:  $\chi^2/d.d.l.$  du fit en fonction de l'exposant  $r$  ; le point sur la courbe correspond à la valeur issue de l'hypothèse d'insertion.

mions dynamiques relativistes sont apparus en 2001, produits par la collaboration UKQCD-QCDSF [Boo01], la collaboration ALPHA [Bod01], dont le résultat doit encore être calibré par ajustement sur une grandeur hadronique pour devenir directement confrontable à l'expérience, et le groupe X - Orsay [Bou01b].

Le statut de cette analyse demeure exploratoire, car nos moyens de calculs n'ont jamais permis de l'améliorer de manière significative. Nous avons travaillé ici avec deux saveurs de quarks dégénérées de  $\simeq 170$  MeV. Les différents réseaux sur lesquels nous avons travaillé sont présentés TAB. II.8. La fenêtre en énergie s'étend jusqu'à  $\simeq 6,5$  GeV, et le condensat est renormalisé à cette valeur-là.

A cause du manque de statistique, seul le vertex asymétrique et le propagateur du gluon ont pu être étudiés de manière convenable. Le vertex symétrique est plus bruyant (fait déjà constaté dans l'analyse “quenched”) et n'offre que la moitié des points à analyser. C'est embarrassant dans la mesure où l'étude analytique du vertex asymétrique sort du cadre strict du développement en produit d'opérateurs par l'utilisation d'une hypothèse d'insertion du vide.

Par ailleurs, les calculs ont été menés sur des réseaux de volume  $16^4$ , ce qui empêche de fixer la maille du réseau de manière absolue, par exemple en mesurant la masse<sup>5</sup> du méson  $\rho$ . Ceci ne nous autorise donc que des estimations

---

5. Sur un réseau à longueur temporelle aussi courte, il n'est vraisemblablement pas possible de séparer le signal du  $\rho$  des autres excitations de son champ interpolant.

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

$\beta$	$\kappa_{\text{mer}}$	Volume	$a^{-1}$ (GeV)	$m_{\text{mer}}$ (MeV)
5.6 [Lip97a]	0.1560	$16^3 \times 32$	2.19(8)	
5.6 [Lip97a]	0.1575	$16^3 \times 32$	2.38(7)	
5.6 [Gim00]	0.1575	$24^3 \times 40$	2.51(6)	
5.6 [Gim00]	0.1580	$24^3 \times 40$	2.54(6)	
5.6	0.1560	$24^4$	2.19(8)	164(7)
5.6	0.1560	$16^4$	2.19(8)	164(7)
5.6	0.1575	$16^4$	2.42(9)	79(3)
5.8	0.1500	$16^4$	2.45(13)	325(18)
5.8	0.1525	$16^4$	2.76(7)	173(4)
5.8	0.1535	$16^4$	2.91(18)	103(16)
5.8	0.1540	$16^4$	3.13(13)	64(5)
6.0	0.1480	$16^4$	3.62(10)	391(12)
6.0	0.1490	$16^4$	3.73(13)	308(12)
6.0	0.1500	$16^4$	3.78(14)	213(3)
6.0	0.1505	$16^4$	3.84(15)	169(8)
6.0	0.1510	$16^4$	3.96(16)	96(4)

TAB. II.8 –: Réseaux utilisés dans l'étude “unquenched”. La statistique est  $\mathcal{O}(100)$  configurations dans chaque cas.  $\kappa_{\text{mer}}$  désigne la masse nue des fermions dynamiques.

relatives des mailles, la calibration absolue étant empruntée au groupe SESAM [Lip97a].

Nous cherchons à présent à calculer  $\alpha_s$  sur une grande fenêtre en énergie, obtenue par juxtaposition de données issues de plusieurs réseaux de mailles de plus en plus fines, correspondant à des quarks dynamiques de même masse renormalisée exprimée en unités physiques.

Lors de l'étude “quenched”, où les mailles des réseaux sont très bien connues, nous avons pu tester qu'il est possible d'évaluer le rapport des mailles de deux réseaux différents uniquement en imposant à la courbe  $\alpha_s(\mu^2)$  d'être régulière. Le caractère exploratoire des calculs avec fermions dynamiques relativistes fait qu'il n'existe encore que peu de données utilisables pour notre propos dans la littérature. Nous avons donc donné un rôle double à  $\alpha_s$  : d'une part il s'agit de l'objet de notre étude, d'autre part c'est un outil pour calibrer les mailles des réseaux.

Les masses des quarks sont déterminées au moyen de l'identité de Ward axiale [Bou01b], selon laquelle :

$$am_{\text{mer}} = \frac{Z_A}{2Z_P} \frac{\sum_x P_5(0) \partial_0 A_0(x, t)}{\sum_x P_5(0) P_5(x, t)} \quad (\text{II.69})$$

### II.3. ANALYSE DES DONNÉES

où  $P_5$  est la densité pseudoscalaire, et  $A_\mu$  le courant axial.

Nous avons retenu la valeur de la maille de calibration évaluée par SE-SAM [Lip97a] en calculant  $m_\rho$ , soit  $a^{-1}(5,6;0,1560) = 2,19$  GeV. Imposer la continuité de  $\alpha_S$  implique :

$$\begin{aligned} a^{-1}(5,8,0.1525) &= 2.85 \pm .09 \pm .04 \times \frac{a^{-1}(5,6,0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV} \\ a^{-1}(6,0,0.1505) &= 3.92 \pm .11 \pm .07 \times \frac{a^{-1}(5,6,0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV} \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

Cette méthode fonctionne très bien, comme le montre la FIG. II.8 ; tous les points, à l'exception de quelques-uns rejetés car souffrant a priori d'effets de volume fini, s'ajustent parfaitement sur une même courbe continue.

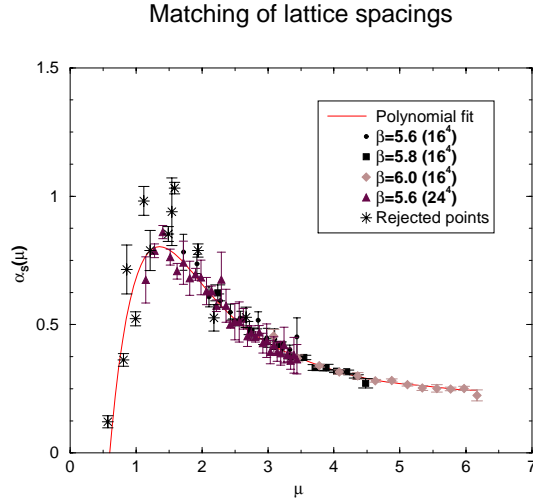


FIG. II.8 –: *Ajustement des données issues de réseaux de mailles de plus en plus fines à  $\beta \in \{5,6 ; 5,8 ; 6,0\}$  sur une courbe polynomiale.*

La situation devient ici moins confortable que précédemment dans l'approximation “quenched” : deux “fits” sont a priori possibles, tous deux donnant de très bons  $\chi^2/\text{d.d.l.}$ , mais dont les interprétations sont malheureusement opposées. En effet le “fit” incorporant des corrections non-perturbatives conduit à :

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 267 (17) \text{ MeV} \quad \text{et} \quad \langle A^2 \rangle = 8,0 (2,5) \text{ GeV}^2 \quad (\text{II.71})$$

avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} \simeq 0,6$ , tandis qu'un fit *sans correction non-perturbative* est toujours possible :

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 345 (6) \text{ MeV} \quad (\text{II.72})$$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} \simeq 0,96$ . La situation est présentée FIG. II.9. Ceci tient au fait que  $\Lambda_{\text{QCD}}$  et  $\langle A^2 \rangle$  varient a contrario ; dans la mesure où les erreurs statistiques sont suffisamment grandes, les compensations entre les deux paramètres peuvent induire ce type d’ambiguïté. La fenêtre en énergie, plus étroite que dans l’étude “quenched”, sépare moins efficacement les comportements logarithmique et en puissance.

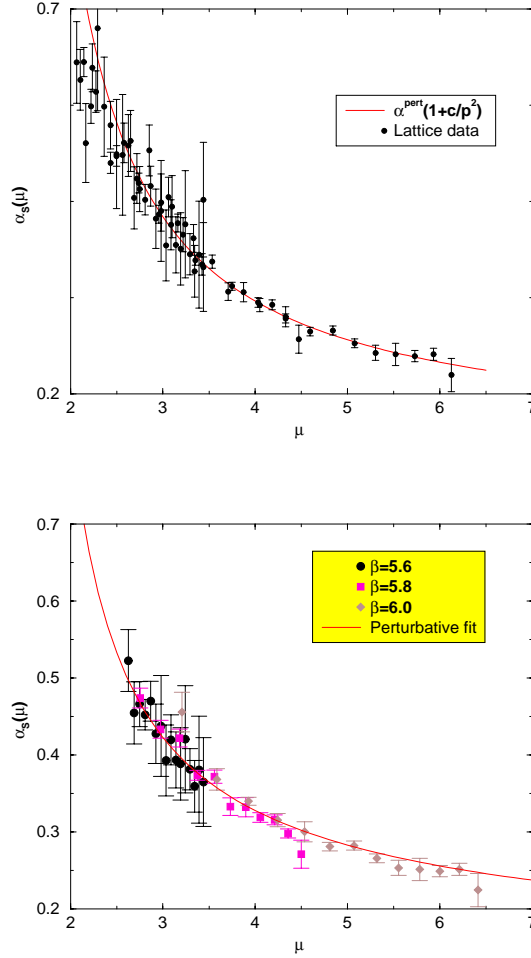


FIG. II.9 –: *Fits avec correction en puissance (en haut) et sans correction en puissance (en bas).*

Une de nos exigences est cependant de pouvoir interpréter toutes les données de la manière la plus économique conceptuellement. L’étude du propagateur du gluon va se révéler essentielle. Nous pouvons partir du principe que les données relèvent d’une description strictement perturbative, et “fitter” les don-

### II.3. ANALYSE DES DONNÉES

$p_{\min}$ (GeV)	$\langle A^2 \rangle^{\text{propag}}$ (GeV <sup>2</sup> )	$\chi_{\text{OPE}}^2/\text{d.d.l.}$	$\chi_{\text{pert}}^2/\text{d.d.l.}$
2.6	3.78(0.27)	1.70	6.11
3.1	4.01(0.43)	1.27	3.05
3.6	3.04(0.92)	1.27	1.62
4.1	3.02(1.73)	1.9	1.92

TAB. II.9 –: “Fit” du propagateur du gluon en tenant compte ( $\chi_{\text{OPE}}^2/\text{d.d.l.}$ ) ou non ( $\chi_{\text{pert}}^2/\text{d.d.l.}$ ) de corrections non-perturbatives de type OPE.

$p_{\min}$ (GeV)	2.6	3.1	3.6	4.1
$\frac{\langle A^2 \rangle^{\text{aS}}}{\langle A^2 \rangle^{\text{propag}}}$	2. 0(0.5)	2.3(0.7)	2.5(1.2)	2.7(2.0)

TAB. II.10 –: Comparaisons des valeurs de  $\langle A^2 \rangle$  extraites de la constante de couplage et du propagateur du gluon pour les données “unquenched”.

nées sur le propagateur du gluon connaissant  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 345$  (6) MeV. De même, nous pouvons chercher un  $\langle A^2 \rangle^{\text{propag}}$  à partir des mêmes données en supposant cette fois que  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 267$  (17) MeV. Les résultats sont récapitulés TAB. II.9. Il apparaît clairement que le fit par une formule strictement perturbative peine à reproduire les données sur une grande gamme d’impulsions.

Afin de conclure sur la cohérence interne de l’analyse OPE de nos données “unquenched” il reste à comparer les deux estimations de  $\langle A^2 \rangle$  que nous avons extraites des données. Sur la TAB. II.10, nous voyons que l’accord des deux estimations est réalisé à environ  $2\sigma$ , ce qui est encourageant au regard du caractère exploratoire de l’étude, et tenant compte de l’incertitude inhérente à l’hypothèse d’insertion du vide. Notons que le rapport est relativement stable sous variation de la taille de la fenêtre en énergie, s’étendant de  $p_{\min}$  jusqu’à  $\simeq 6,5$  GeV ; c’est aussi le cas de notre détermination de  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2}$ , qui varie entre 267 MeV et 271 MeV en faisant varier  $p_{\min}$ .

Il ne reste plus qu’à estimer l’erreur systématique sur  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2}$  pour conclure sur le volet “unquenched” de l’étude. Nous avons utilisé des fermions de Wilson, qui sont sujets à des erreurs  $\mathcal{O}(a)$ , qui se propagent multiplicativement sur  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2}$  pour des raisons dimensionnelles. Nous estimons grossièrement l’erreur sur la maille de calibration à 20 % à partir de la FIG. II.10, d’où une incertitude de 50 MeV sur  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2}$ . Nous n’avons pas observé d’effets significatifs en  $\mathcal{O}(a\Lambda_{\text{QCD}})$ , ni en  $\mathcal{O}(am_{\text{mer}})$ . Nous retenons donc comme valeur finale :

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 267 \text{ (17) (50) MeV} \quad (\text{II.73})$$

où la première erreur est statistique et la seconde systématique. Cette valeur

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

est en accord avec celle de la collaboration UKQCD-QCDSF [Boo01]  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 217 (16) (11) \text{ MeV}$ , bien que cet accord soit un peu artificiel en raison de la taille des erreurs systématiques.

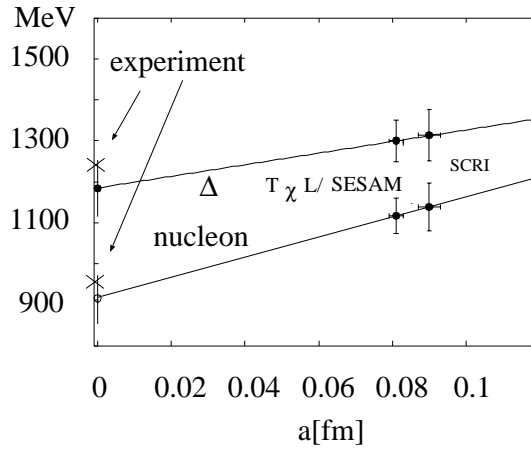
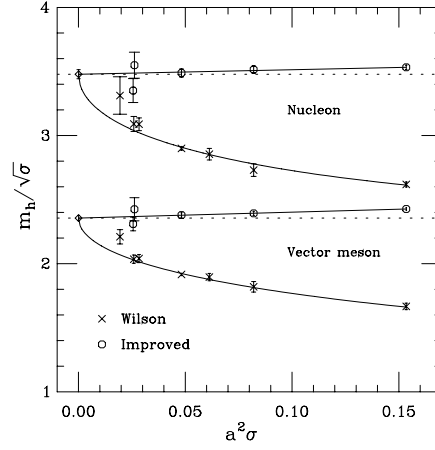


FIG. II.10 —: *Extrapolation à la limite du continu des masses des hadrons avec fermions dynamiques de Wilson [Lip97a] et spectre des hadrons pour des fermions “quenched” de Wilson avec et sans amélioration  $\mathcal{O}(a)$  [EHK97].*

### II.3.3 Conclusions générales

La constante de couplage de la QCD est un objet très bien connu expérimentalement, dont l'évolution a été mesurée en de nombreux points, ainsi que nous pouvons le voir FIG. II.11. Nous prenons comme valeurs de références :

$$\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 0,1183 \pm 0,0027 \quad \text{et} \quad \alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_\tau) = 0,35 \pm 0,03 \quad (\text{II.74})$$

respectivement issues de [Bet02] et [PDG02].

Connaissant  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=0} = 233 \text{ (28) MeV}$  et  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2} = 267 \text{ (17) (50) MeV}$ , nous pouvons calculer  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_\tau)$  et  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_Z)$  de la manière suivante [PDG02] : au seuil du quark c (pris à 1,3 GeV), nous extrapolons<sup>6</sup>  $\alpha_{S,\text{pert}}^{n_f=0}$  et  $\alpha_{S,\text{pert}}^{n_f=2}$  vers  $\alpha_{S,\text{pert}}^{n_f=3}$  dans le schéma  $\overline{\text{MS}}$ . Nous faisons évoluer cette quantité avec quatre saveurs de quarks actives jusqu'au seuil du quark b (pris à 4,3 GeV) pour “brancher” la cinquième saveur jusqu'à la masse du  $Z^0$ . Nous prenons soin d'assurer la continuité de  $\alpha_S$  à chaque seuil.

Nous n'effectuons cette évolution que sur la partie perturbative<sup>7</sup>, sachant que nous ne savons pas comment faire évoluer la correction en puissance. Si cela est certainement sans conséquence à la masse du  $Z^0$ , nous pourrions nous interroger sur le sens de cette comparaison à la masse du  $\tau$  ; en effet, tout notre argumentaire se propose d'expliquer pourquoi des corrections non-perturbatives peuvent encore être importantes à 10 GeV. Rappelons toutefois que  $\Lambda^{\overline{\text{MOM}}} \simeq \Lambda^{\text{MOM}} \simeq 1 \text{ GeV}$  alors que  $\Lambda^{\overline{\text{MS}}} \simeq 200 \text{ MeV}$ . Les effets non-perturbatifs se font donc sentir de manière plus ou moins aigüe suivant les schémas de renormalisation, et nous ne savons convertir des quantités d'un schéma de renormalisation à un autre que de manière perturbative.

De toute façon, les contributions non-perturbatives à  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_\tau)$  ne sont pas grandes. Elles ont d'abord été estimées à  $-0,014 \pm 0,005$  au moyen des règles de somme de la QCD [NP88], [BNP92] et [Neu95] en remarquant que jusqu'à  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M_\tau^6}\right)$  ne contribuent que des opérateurs chiralement supprimés. Suite à l'analyse de Le Diberder et Pich [LDP92], cette estimation a été corroborée par l'évaluation, à partir des données expérimentales, des coefficients numériques multipliant les opérateurs des corrections non-perturbatives des

6. C'est du moins tout ce que nous savons faire ; il se peut que le fait que l'action ne soit plus positive pour un nombre impair de saveurs cache un phénomène physique subtil, invalidant une extrapolation continue de 0 et 2 saveurs vers 3 saveurs, ou une interpolation entre 2 et 4 saveurs.

7.  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}$  n'étant défini qu'en perturbations, la notion de correction non-perturbative est pour le moins ambiguë. Retenons cependant que nous commettons l'abus de langage de parler de partie perturbative de  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}$  pour l'évolution sous le flot du groupe de renormalisation évaluée jusqu'au quatrième ordre (i.e. incluant  $\beta_3$ ).



## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

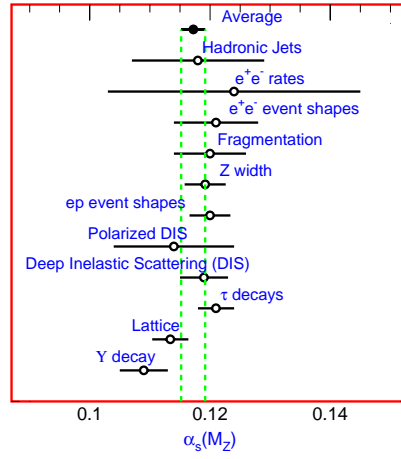
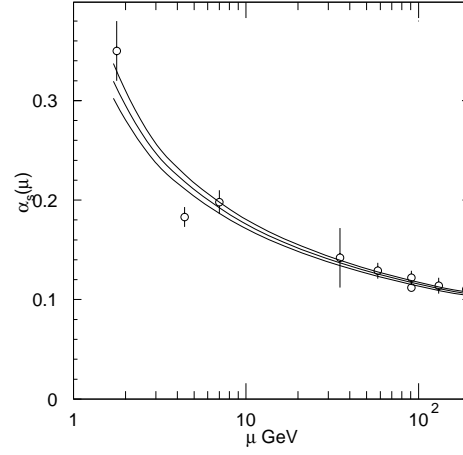


FIG. II.11 –: *Evolution de  $\alpha_s$  et points de mesures expérimentales (en haut) et répartition générale des valeurs de  $\alpha_s(M_Z)$  (en bas) [PDG02].*

### II.3. ANALYSE DES DONNÉES

règles de somme, et ce tant par CLEO [CLE95] qu’ALEPH [ALE99] et OPAL [OPA99]. La comparaison de notre calcul de  $\alpha_{S,\text{pert}}^{\overline{\text{MS}}}(M_\tau)$ , partie perturbative de  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_\tau)$ , à la valeur expérimentale, est donc significative.

Les valeurs que nous obtenons sont :

$$\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 0,113 \text{ (3) (4)} \quad \text{et} \quad \alpha_{S,\text{pert}}^{\overline{\text{MS}}}(M_\tau) = 0,283 \text{ (18) (37)} \quad (\text{II.75})$$

La valeur à la masse du  $Z^0$  est en accord à  $1\sigma$  ; celle à la masse du  $\tau$  est malheureusement moins bonne. Compte-tenu du caractère exploratoire de cette étude (lourde masse de quarks, petits réseaux), nous tenons ce résultat pour encourageant, et considérons qu’il appelle une nouvelle étude destinée à diminuer les erreurs sur nos prédictions.

Par ailleurs, depuis 2000, fin de notre analyse des données “quenched”, d’autres groupes ont poursuivi leurs travaux. Citons notamment [SK02] récapitulant les résultats obtenus en évaluant  $\alpha_S$  à partir du vertex quark-antiquark-gluon en jauge de Landau. Les résultats obtenus dans ce cas sont assez proches des nôtres, bien que nettement plus bruyants. Ils conduisent à  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=0} = 300_{-180}^{+150} \pm 55 \pm 30 \text{ MeV}$ , et ne peuvent ni confirmer ni infirmer la présence de corrections en puissance à leur signal. La constante de couplage est petite, peut-être nulle à impulsion nulle, et en tout cas certainement finie.

La Collaboration ALPHA observe un comportement infra-rouge de la constante de couplage en  $e^{mL}$  où  $L$  est la taille spatiale du réseau, et  $m$  une quantité positive [Hei01]. Selon un théorème taubérien invoqué par D. Shirkov [Shi02b], en termes d’impulsion  $p$ , ce résultat peut se transcrire en un comportement singulier (en  $1/p$ ) ou un comportement régulier de limite finie.

Ainsi que nous l’avons mentionné dans la SEC. I.5.3, Alkofer et al. obtiennent une valeur finie non nulle de la constante de couplage dans l’infra-rouge, une explosion du propagateur du ghost et une annulation du propagateur du gluon.

A première vue, nos données, aussi bien “quenched” qu’“unquenched” indiquent que la constante de couplage demeure toujours petite, de l’ordre de 1 à son maximum, et visiblement nulle dans l’infra-rouge d’après les FIG. II.4 et FIG. II.8. Nous pouvons utiliser toutes nos données réseau “quenched” pour obtenir la FIG. II.12. Il est absolument remarquable que toutes les valeurs se rassemblent sur une même courbe régulière, indépendamment de la maille ou du volume des réseaux. Ceci montre indubitablement que le signal obtenu est physique, même s’il est difficile d’interprétation. Une tentative en ce sens sera cependant faite CHAP. III.

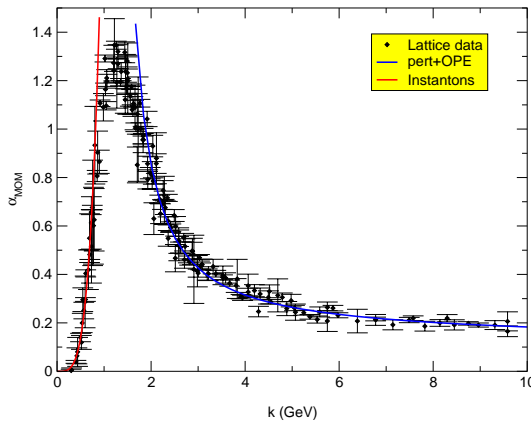


FIG. II.12 –: Constante de couplage extraite du vertex symétrique évaluée à partir de données issues de neuf réseaux différents.

## II.4 Opérateur $A^2$

### II.4.1 Nécessité de l'analyse OPE

Prenons l'argument du CHAP. II en sens inverse. Partons de la constatation empirique minimale suivante : la constante de couplage forte et le propagateur du gluon admettent des corrections en  $\frac{1}{p^2}$  au comportement perturbatif, et ces corrections ont éventuellement une évolution logarithmique en l'échelle d'observation et en le point de renormalisation. Concrètement, nous modélisons ce que nous voyons sur réseau ( FIG. II.13) en écrivant :

$$p^2 G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) = p^2 G_{R, \text{pert}}^{(2)}(p^2; \mu^2) + \frac{d\left(\alpha_S(\mu^2), \frac{p^2}{\mu^2}\right)}{p^2} \quad (\text{II.76})$$

où  $G_R^{(2)}(p^2; \mu^2)$  désigne le propagateur du gluon, traversé par une impulsion  $p$ , et renormalisé à une échelle  $\mu$ .  $G_{R, \text{pert}}^{(2)}(p^2; \mu^2)$  désigne cette même quantité, mais évaluée cette fois-ci en perturbation. Dans ces deux équations, nous n'avons pas spécifié le schéma de renormalisation utilisé. Celui-ci doit faire le pont entre les données sur le réseau, et une analyse théorique. Sur le réseau, nous renormalisons naturellement en imposant  $p^2 G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) = 1$  à  $p^2 = \mu^2$ , soit encore  $p^2 G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) = \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G^{(2)}(\mu^2)}$ . Cette manière de faire est avantageuse, car non-perturbative, et facile à implémenter numériquement. Elle mélange néanmoins une contribution en  $\frac{1}{\mu^2}$  venant du propagateur nu au dénominateur

#### II.4. OPÉRATEUR $A^2$

avec la partie  $G_{\text{pert}}^{(2)}(p^2)$  du numérateur, i.e. les contributions de la théorie des perturbations et de la correction en puissance ne sont pas proprement séparées. Nous pouvons par contre faire cette différence en renormalisant le propagateur par  $\mu^2 G_{\text{R}}^{(2)}(p^2; \mu^2) = \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G_{\text{pert}}^{(2)}(\mu^2)}$ , ce qui ne fait qu'introduire des corrections en  $\frac{1}{\mu^2}$  par rapport à la renormalisation la plus naturelle sur réseau. Notamment, à l'ordre dominant, le terme  $d\left(\alpha_S(\mu^2), \frac{p^2}{\mu^2}\right)$  peut être considéré comme inchangé.

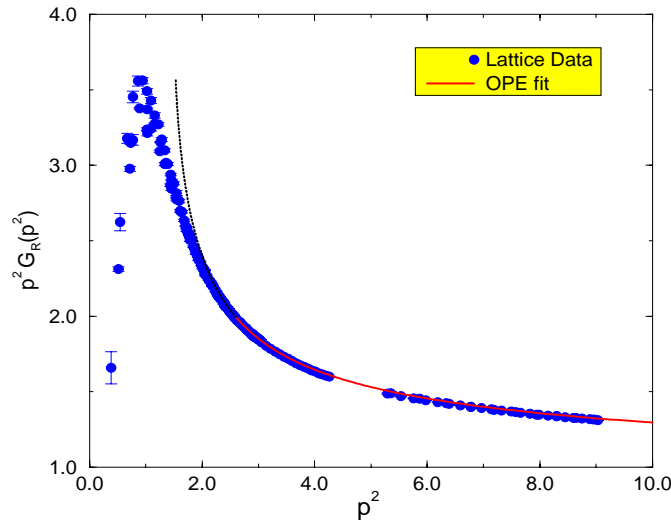


FIG. II.13 –: *Propagateur du gluon évalué sur réseau, entre 0 et  $\simeq 9$  GeV, renormalisé à 10 GeV dans le schéma MOM.*

Donnons-nous donc  $A_{\text{R}\mu}^a$  le champ de jauge renormalisé à une échelle  $\mu$  dans un certain schéma, qui n'a pas forcément besoin d'être MOM régularisé par le réseau pour l'argumentation qui va suivre, mais qui doit simplement être dans l'esprit du paragraphe précédent. Le propagateur est défini dans l'espace euclidien par :

$$\int d^4x e^{ipx} \langle A_{\text{R}\mu}^a(0) A_{\text{R}\mu}^a(x) \rangle = \delta^{a,b} \left( \delta_{\mu,\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) G_{\text{R}}^{(2)}(p^2; \mu^2) \quad (\text{II.77})$$

L'inversion de la transformée de Fourier s'écrit :

$$\sum_{a,\mu} \langle A_{\text{R}\mu}^a(0) A_{\text{R}\mu}^a(y) \rangle = 3(N^2 - 1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipy} G_{\text{R}}^{(2)}(p^2; \mu^2) \quad (\text{II.78})$$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

et à  $y = 0$ , cette équation relie le condensat  $\langle A^2 \rangle = \sum_{a,\mu} \langle A_{R\mu}^a(0) A_{R\mu}^a(0) \rangle$  au propagateur du gluon renormalisé :

$$\sum_{a,\mu} \langle A_{R\mu}^a(0) A_{R\mu}^a(y) \rangle = \frac{3(N^2 - 1)}{16\pi^2} \int p^2 dp^2 e^{-ipy} G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) \quad (\text{II.79})$$

Bien sûr, le passage à la limite  $y \rightarrow 0$  introduit une divergence supplémentaire, que nous régularisons à l'aide d'un nouveau paramètre  $\Lambda$ . Nous pouvons donc définir un *condensat régularisé*  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda$  par :

$$\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda = \frac{3(N^2 - 1)}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} p^2 dp^2 G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) \quad (\text{II.80})$$

Le seul opérateur local auquel  $\langle A^2 \rangle$  puisse se mélanger n'est autre que l'identité; aussi nous attendons-nous à ce que  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda$  se comporte asymptotiquement en  $\Lambda^2(\log \Lambda)^a$  et  $(\log \Lambda)^b$  lorsque  $\Lambda$  tend vers  $+\infty$ .

Séparons alors  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda$  en la somme des trois termes suivants :

$$\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{pert}} = \frac{3(N^2 - 1)}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} p^2 dp^2 G_{R,\text{pert}}^{(2)}(p^2; \mu^2) \quad (\text{II.81})$$

$$\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}} = \frac{3(N^2 - 1)}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} d\left(\alpha_S(\mu^2), \frac{p^2}{\mu^2}\right) \quad (\text{II.82})$$

$$\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{IR}} = \frac{3(N^2 - 1)}{16\pi^2} \int_0^{p_{\min}^2} p^2 dp^2 G_R^{(2)}(p^2; \mu^2) \quad (\text{II.83})$$

$\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{pert}}$  est le seul terme quadratiquement divergent en le régulateur;  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}}$  dépend seulement logarithmiquement de  $\Lambda$ , et  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{IR}}$  est fini lorsque  $\Lambda$  tend vers  $+\infty$ . Une nouvelle condition de renormalisation parfaitement légitime d'un condensat  $\langle A^2 \rangle$  est par conséquent<sup>8</sup> :

$$\langle A^2(\Lambda^2) \rangle^{\text{nouv}} = \langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda - \langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{pert}} \quad (\text{II.84})$$

Cette équation définit naturellement  $\langle A^2(\Lambda^2) \rangle^{\text{nouv}}$  à l'échelle de renormalisation  $\Lambda$ ; elle inclut toute les contributions non-perturbatives à  $\langle A^2 \rangle$ , puisque par construction :

$$\langle A^2(\Lambda^2) \rangle^{\text{nouv}} = \langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{IR}} + \langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}} \quad (\text{II.85})$$

Les équations de Callan-Symanzik assurent que la dimension anormale d'un opérateur local ne dépend pas, au logarithme dominant, du choix spécifique de

---

<sup>8</sup>. La dépendance résiduelle de  $\langle A^2(\Lambda^2) \rangle^{\text{nouv}}$  en  $\mu$  est implicite. Elle provient du fait que la constante de couplage et le champ de jauge sont déjà renormalisés à l'échelle  $\mu$ .

#### II.4. OPÉRATEUR $A^2$

la procédure de régularisation, ni du schéma de renormalisation. Connaissant alors la dimension anormale d'un opérateur  $A^2$  tel qu'introduit au CHAP. II, ce nouveau condensat  $\langle A^2 \rangle$  évalué à l'échelle de renormalisation  $\mu$  s'écrit, au logarithme dominant :

$$\langle A^2(\Lambda^2) \rangle^{\text{nouv}} \simeq \left( \frac{\alpha_S(\Lambda^2)}{\alpha_S(\mu^2)} \right)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}} \quad (\text{II.86})$$

Comme  $\hat{\gamma}_0 > 0$ ,  $\langle A^2(\Lambda^2) \rangle^{\text{nouv}}$  diverge quand  $\Lambda$  tend vers  $+\infty$ , et donc il en est de même de  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}}$  car  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{IR}}$  reste fini par construction. Par suite, asymptotiquement :

$$\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}} \simeq \left( \frac{\alpha_S(\Lambda^2)}{\alpha_S(\mu^2)} \right)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}} \quad (\text{II.87})$$

L'hypothèse minimale d'évolution logarithmique (éventuelle) de  $d$  est complètement prise en compte en posant  $d\left(\alpha_S(\mu^2), \frac{p^2}{\mu^2}\right) = C(\mu^2)\alpha_S(p^2)^{-\delta}$  où les constantes  $C(\mu^2)$  et  $\delta$  sont à déterminer. La démarche est alors simple : en remarquant que  $\frac{dp^2}{p^2} = d \log p^2 \simeq \frac{-4\pi}{\beta_0} \frac{d\alpha_S}{\alpha_S}$ , la définition (II.82) de  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}}$  entraîne :

$$\begin{aligned} \langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}} &= \frac{3(N^2 - 1)}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} C(\mu^2) \alpha_S(p^2)^{-\delta} \\ &= -\frac{3(N^2 - 1)}{4\pi\beta_0} C(\mu^2) \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} d\alpha_S \alpha_S^{-\delta-2} \end{aligned} \quad (\text{II.88})$$

La connaissance du comportement asymptotique de  $\langle A^2(\mu^2) \rangle_\Lambda^{\text{puis}}$  assure à présent que :

$$\frac{\alpha_S(\mu^2)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}}{\alpha_S(\Lambda^2)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}} \langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}} \quad \Lambda \xrightarrow{\sim} \infty \quad \frac{C(\mu^2)}{\delta + 1} \frac{3(N^2 - 1)}{4\pi\beta_0} \left[ \frac{1}{\alpha_S(\Lambda^2)^{\delta+1}} - \frac{1}{\alpha_S(p_{\min}^2)^{\delta+1}} \right] \quad (\text{II.89})$$

Si  $\delta \leq -1$ , le membre de droite a une limite finie lorsque  $\Lambda \rightarrow \infty$  alors que le membre de gauche est divergent. Par suite, prenons  $\delta > -1$  ; la divergence en  $\Lambda$  des membres de droite et gauche doit toujours être la même, ce qui impose  $\delta + 1 = \frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0} = \frac{9}{4\beta_0}$ . Par suite, il vient aussi  $C(\mu^2) = \frac{3\pi}{(N_c^2 - 1)} \langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}}$  dès que  $\mu \gg p_{\min}$ . L'équation (II.76) devient maintenant :

$$p^2 G_R^{(2)}(p^2, \mu^2) = p^2 G_{R,\text{pert}}^{(2)}(p^2, \mu^2) + 3\pi \frac{\alpha_S(p^2)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0+1}}{\alpha_S(\mu^2)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0}} \frac{\langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}}}{(N^2 - 1)} \frac{1}{p^2} \quad (\text{II.90})$$

qui n'est autre que la description (II.47) et (II.52) des corrections non-perturbatives en termes de développement en produit d'opérateurs.

Puisque  $\langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}}$  est obtenu à partir du calcul d'une boucle fermée de champ de jauge renormalisé, cette démonstration confirme que le coefficient  $\langle A^2 \rangle$  de (II.47) est effectivement un condensat de l'opérateur  $A^2$ . Au logarithme dominant, la nouvelle définition de  $\langle A^2 \rangle$  est équivalente à celle issue de l'analyse en développement en produit d'opérateurs. A l'ordre sous-dominant, la différence de ces deux définitions se manifesterait éventuellement, ne serait-ce que via le terme  $\frac{1}{\alpha_S(p_{\min}^2)^{\delta+1}}$  de (II.89), par un nouveau coefficient  $c_2$  dans le développement en produit d'opérateurs des fonctions de Green invoquant  $\langle A^2(\mu^2) \rangle^{\text{nouv}}$ .

Enfin, la conclusion principale de cette section est que l'interprétation de nos données numériques dans le cadre du développement en produit d'opérateurs est nécessaire.

## II.4.2 Phénoménologie émergente de $\langle A^2 \rangle$

Les derniers mois ont vu un développement rapide de la littérature sur les aspects phénoménologiques du condensat  $\langle A^2 \rangle$ . Les progrès se sont orientés essentiellement autour de trois axes :

- L'opérateur  $A^2$  est local dans la jauge de Landau, mais une définition physique (i.e. invariante de jauge) de celui-ci est nécessairement non-locale.
- L'opérateur  $A^2$  en jauge de Landau est invariant BRST, et n'est que le cas limite de l'opérateur de masse  $A^2 - ac\bar{c}$  de la jauge de Curci- Ferrari.
- Une valeur non-nulle de  $\langle A^2 \rangle$ , et d'autres opérateurs analogues, semble énergétiquement favorisée dans le vide de la QCD.

### A la recherche d'une définition non-locale et invariante de jauge

Gubarev, Stodolsky et Zakharov [GSZ00], [GZ00] ont remarqué que la valeur moyenne du champ de jauge en QED peut s'écrire de la manière non-locale suivante :

$$\begin{aligned} \int d^4x A^2(x) &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x d^4x' \frac{F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x')}{(x-x')^2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x d^4x' \frac{\partial_\mu A_\mu(x) \partial_\nu A_\nu(x')}{(x-x')^2} \\ &\quad + \text{des termes de bord} \end{aligned} \tag{II.91}$$

#### II.4. OPÉRATEUR $A^2$

Nous avons vu dans la SEC. I.4 que la jauge de Landau est fixée en minimisant la quantité  $\int d^4x A^2(x)$  sur une orbite de jauge ; au minimum<sup>9</sup> le champ est transverse, et la valeur moyenne de  $A^2$  vérifie :

$$\int d^4x A^2(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x d^4x' \frac{F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x')}{(x - x')^2} + \text{des termes de bord} \quad (\text{II.92})$$

ce qui lui confère une interprétation invariante de jauge, donc physique, mais hautement non locale. Insistons tout de suite sur le fait que la persistance de cette propriété après renormalisation n'est pas du tout claire.

Une étude de la QED sur réseau, sous ses formes compacte et non-compacte, semble permettre d'interpréter  $\langle A^2 \rangle$  comme paramètre d'ordre de la transition de phase associée à la condensation de monopoles lorsque que  $e^2 \simeq 1$ . En effet, la version non-compacte est une théorie (perturbative) de photons libres, alors que la version compacte a des propriétés topologiques non-triviales, telles que la condensation des monopoles magnétiques. Comme la théorie de perturbation est la même dans ces deux théories, l'étude de :

$$\zeta(e^2) = \int [dA] A^2 e^{-\mathcal{S}_{\text{compacte}}} - \int [dA] A^2 e^{-\mathcal{S}_{\text{non-compacte}}} \quad (\text{II.93})$$

permet de “mesurer” l'influence des défauts topologiques. Une simulation numérique exhibant une variation brusque de  $\zeta(e^2)$  autour de  $e^2 = 1$  renforce cette interprétation.

L'extension de (II.91) à la QCD n'est pas simple, et rencontre à nouveau le problème des copies de Gribov. La difficulté est contenue dans le terme de bord. En QED, la transcription directe de (II.91) en termes d'impulsions s'écrit, au terme de bord près :

$$\int d^4x A^2(x) = \int d^4p \frac{F^{\mu\nu}(p) F_{\mu\nu}^*(p)}{p^2} + \int d^4p \frac{p^\mu A_\mu(p) p^\nu A_\nu^*(p)}{p^2} \quad (\text{II.94})$$

où les “\*” désignent la conjugaison complexe, qui assure la positivité du second membre. Si nous prenons une configuration réalisant le minimum de  $\int d^4x A^2(x)$ , (II.94) donne :

$$\int d^4x A^2(x) = \int d^4p \frac{F^{\mu\nu}(p) F_{\mu\nu}^*(p)}{p^2} \quad (\text{II.95})$$

Mais alors, si nous prenons deux copies de Gribov, les estimations du membre de gauche sont différentes, car il sert à les distinguer, alors que les évaluations

---

9. Nous ne discutons pas encore le problème de l'ambiguïté de Gribov.



du membre de droite sont identiques, car elles ne diffèrent que d'une transformation de jauge. Pour éclaircir ce point-là, plaçons-nous à volume fini, dans un hypercube de côté  $L$ , muni de conditions aux bords périodiques. L'intégrale est remplacée par une somme sur les moments, et l'égalité de Parseval-Bessel s'écrit sous une forme correcte :

$$\int d^4x A^2(x) - \frac{1}{L^4} \left( \int d^4x A(x) \right)^2 = \sum_{p \neq 0} \frac{F^{\mu\nu}(p) F_{\mu\nu}^*(p)}{p^2} + \sum_{p \neq 0} \frac{p^\mu A_\mu(p) p^\nu A_\nu^*(p)}{p^2} \quad (\text{II.96})$$

En une configuration minimisant  $\int d^4x A^2(x)$ , cette dernière relation prend la forme :

$$\int d^4x A^2(x) - \frac{1}{L^4} \left( \int d^4x A(x) \right)^2 = \sum_{p \neq 0} \frac{F^{\mu\nu}(p) F_{\mu\nu}^*(p)}{p^2} \quad (\text{II.97})$$

Le membre de droite est invariant de jauge. Le membre de gauche est dépourvu de l'ambiguïté de Gribov car en QED celle-ci est entièrement caractérisée par le mode zéro du champ de jauge.

Ceci montre deux choses quant à l'extension de ces résultats à la QCD : d'une part, essayer de donner une formulation invariante de jauge et non-locale de  $\langle A^2 \rangle$  soulève le problème des copies de Gribov, plus ardu en QCD qu'en QED. Notamment, en QCD, il ne se réduit pas au traitement du mode zéro. D'autre part, la transcription directe des expressions fait intervenir la partie dépendant de la jauge  $\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)$  de  $F_{\mu\nu}^a$ , si bien que même le second membre d'une équation telle que (II.97) dépendrait de la jauge.

Stodolsky, van Baal et Zakharov [SBZ02] ont proposé une solution à ce problème. Il faut restreindre le choix des champs de jauge à la région modulaire fondamentale. Une manière commode de faire ceci est de travailler à volume fini assez petit. Dans un tel cas, seul le mode zéro va sentir l'horizon de Gribov, et donc les effets non-perturbatifs. Dès que le volume est suffisamment petit, les modes d'impulsions non-nulles peuvent être traités perturbativement, et soustraits de la valeur moyenne de  $A^2$ , donnant ainsi par construction une valeur finie et non-perturbative de  $\langle A^2 \rangle$ , qu'il est alors possible de calculer simplement en mettant un terme source pour  $A^2$  dans l'action de la QCD. Cependant, bien qu'une simulation numérique à petit volume montre l'applicabilité de la démarche, il s'agit d'un succès de principe, car par nécessité loin de la limite de volume infini.

## Invariance BRST

Reprenons le Lagrangien de Fadeev-Popov (I.29) :

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial^\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b \quad (\text{II.98})$$

#### II.4. OPÉRATEUR $A^2$

et linéarisons le terme  $-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$  en introduisant un *champ de Nakanishi-Lautrup*  $B^a$  de sorte à écrire l'action modifiée :

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{YM}} + \frac{1}{2}\alpha B^a B^a + B^a \partial_\mu A^{a\mu} + (\partial^\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b \right) \quad (\text{II.99})$$

Celle-ci est invariante sous la symétrie BRST paramétrée par une constante infinitésimale  $\theta$  qui anticommute avec  $c_a$  et  $\bar{c}_a$  et, de manière plus générale, avec tous les champs fermioniques. Pour un  $\theta$  donné, la transformation BRST est

$$\delta_\theta \psi = ig\theta t^a c^a \psi \quad (\text{II.100})$$

$$\delta_\theta A_\mu^a = \theta D_\mu^{ab} c^b \quad (\text{II.101})$$

$$\delta_\theta \bar{c}^a = -i\theta B^a \quad (\text{II.102})$$

$$\delta_\theta c^a = -\frac{1}{2}g\theta f^{abc} c^b c^c \quad (\text{II.103})$$

$$\delta_\theta B^a = 0 \quad (\text{II.104})$$

L'opérateur  $s$  défini par  $\delta_\theta F = \theta sF$  pour une fonctionnelle  $F$  des champs  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $c$ ,  $\bar{c}$ ,  $A$  et  $B$  est nilpotent d'ordre deux.

En jauge de Landau, nous calculons :

$$\begin{aligned} sA^2(x) &= (sA_\mu^a(x))A_\mu^a(x) + A_\mu^a(x)(sA_\mu^a(x)) = 2(D_\mu^{ab}c^b(x))A_\mu^a(x) \\ &= 2(\partial_\mu \delta^{ab}c^b(x) - gf^{cab}A_\mu^c(x)c^b(x))A_\mu^a(x) \end{aligned} \quad (\text{II.105})$$

soit, en utilisant l'antisymétrie de la constante de structure  $f^{abc}$

$$sA^2(x) = 2(\partial_\mu c^a(x))A_\mu^a(x) \quad (\text{II.106})$$

Mais en jauge de Landau  $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ , si bien que :

$$\partial_\mu (A_\mu^a(x)c^a(x)) = (\partial_\mu c^a(x))A_\mu^a(x) \quad (\text{II.107})$$

L'invariance par translation permet d'écrire :

$$sA^2(0) = s\frac{1}{V} \int_V d^4x A^2(x) = \frac{1}{V} \int_V d^4x \partial_\mu (A_\mu^a(x)c^a(x)) = 0 \quad (\text{II.108})$$

L'opérateur  $A^2$  en jauge de Landau est donc invariant BRST. En tant que tel, et ainsi que nous l'avons souligné auparavant, il est tout-à-fait légitime de le voir apparaître dans le développement en produit d'opérateurs d'une fonction de Green.

Ce calcul peut se généraliser. Curci et Ferrari [CF76] ont introduit un Lagrangien différent du Lagrangien usuel de Faddeev-Popov, mais produisant des

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

résultats identiques dans le secteur invariant de jauge. Ce Lagrangien exhibe une nouvelle symétrie, dite *anti-BRST*. Si nous notons :

$$[X, Y]^a = g f^{abc} X^b Y^c \quad (\text{II.109})$$

le crochet de Lie usuel, les opérateurs  $s$  et  $\bar{s}$  des symétries BRST et anti-BRST sont définis par :

$$\begin{aligned} sA_\mu &= D_\mu c & \bar{s}A_\mu &= D_\mu \bar{c} \\ sc &= -\frac{1}{2}[c, c] & \bar{s}\bar{c} &= -\frac{1}{2}[\bar{c}, \bar{c}] \\ s\bar{c} &= B & \bar{s}C &= -B - [c, \bar{c}] \\ sB &= 0 & \bar{s}B &= -[\bar{c}, B] \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

Tant que nous n'utilisons pas les équations du mouvement du champ de Nakanishi-Lautrup, la transformation BRST garde la forme usuelle. Le Lagrangien de Curci-Ferrari s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{BTM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(a + a')B^2 + B \left( \partial A + \frac{1}{2}a[\bar{c}, c] \right) + \partial_\mu \bar{c} D^\mu c + \frac{1}{4}a[\bar{c}, c]^2 \quad (\text{II.111})$$

Nous retrouvons la jauge de Landau du Lagrangien usuel de Faddeev-Popov lorsque  $a \rightarrow 0$ . Baulieu et Thierry-Mieg [BTM82] ont montré qu'il vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Ce Lagrangien est de dimension 4.
- (ii) Il est invariant sous les transformations de Lorentz et les transformations de jauge globales.
- (iii) Il est invariant sous les transformations BRST et anti-BRST.

et que le Lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{BTM}}$  le plus général possédant ces trois propriétés est :

$$\mathcal{L}_{\text{BTM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}s\bar{s}(A^2 - ac\bar{c}) + \frac{1}{2}a's(\bar{c}B) \quad (\text{II.112})$$

C'est essentiellement le point de départ d'une série d'articles de Kondo et al., parmi lesquels [Kon01a] et [Kon01b] où il est montré que l'opérateur  $A^2 - ac\bar{c}$  est invariant (sur couche) BRST et anti-BRST ; il est aussi démontré explicitement que cette propriété survit pour l'opérateur renormalisé à une boucle, et Gracey et Browne [BG02] l'établissent pour l'opérateur renormalisé à deux boucles. Par ailleurs, Kondo et al. généralisent dans ce cadre toute l'analyse OPE à une boucle, et posent la question de la génération d'une masse dynamique pour le propagateur du gluon à partir de  $\langle A^2 \rangle$ .

Cependant, même si ces travaux semblent manifestement donner un sens plus général, et peut-être plus physique, à l'analyse que nous avons faite en

#### II.4. OPÉRATEUR $A^2$

jauge de Landau, le condensat “général” de dimension massique deux est régi par une dynamique essentiellement différente, ne serait-ce que parce que le Lagrangien de Curci - Ferrari possède plusieurs couplages supplémentaires par rapport au Lagrangien de Faddeev-Popov. Ainsi, même si ces Lagrangiens décrivent tous les deux la même physique dans le secteur invariant de jauge, il n’est pas du tout clair que les résultats s’interprètent de la même façon.

Soulignons néanmoins que Gracey [Gra02] a calculé à trois boucles la dimension anormale de l’opérateur  $A^2$  en jauge de Landau en renormalisant l’opérateur de masse du modèle de Curci-Ferrari, puis en prenant la limite de la QCD en jauge de Landau. Ce résultat a ouvert la voie à Dudal, Verschelde et Sorella [DVS02], qui ont montré que la dimension anormale de l’opérateur  $A^2$  n’est pas un paramètre “supplémentaire” de la QCD, mais une quantité qui ne dépend que de la fonction  $\beta$  et de la dimension anormale  $\gamma_3$  du champ de jauge. En utilisant des arguments de symétrie BRST et une identité de Ward spécifique à la jauge de Landau, ils établissent :

$$2\gamma_{A^2} = \frac{\beta(\alpha)}{2\alpha} + \gamma_3(\alpha) \quad (\text{II.113})$$

Cette relation doit être valable pour tout schéma de renormalisation partant d’une régularisation invariante de jauge. Elle certifie que  $\langle A^2 \rangle$  est un objet très particulier de la QCD, dont les divergences ultra-violettes non-triviales sont contrôlées d’une façon particulièrement simple.

Ceci reste malgré tout insuffisant pour notre propos. La symétrie BRST n’est bien définie que perturbativement, et, ainsi que l’a remarqué Neuberger [Neu86], une construction non-perturbative de cette symétrie pose problème. De manière générique, notons  $\phi$  les champs des quarks et des gluons du Lagrangien de la QCD. Une action invariante sous la symétrie BRST admet la forme suivante :

$$\mathcal{S}[\phi, \bar{c}, c, B] = \mathcal{S}_{\text{YM}}[\phi] + s\Omega[\phi, \bar{c}, c, B] \quad (\text{II.114})$$

où  $\mathcal{S}_{\text{YM}}[\phi]$  est l’action de Yang-Mills, invariante de jauge, et  $s\Omega[\phi, \bar{c}, c, B]$  le terme de fixation de jauge. La valeur moyenne d’un opérateur  $O$  invariant de jauge est :

$$\langle O \rangle_\Omega = \int [d\phi][dc][d\bar{c}][dB] O \exp(-\mathcal{S}_{\text{YM}}[\phi] - s\Omega[\phi, \bar{c}, c, B]) \quad (\text{II.115})$$

Cette quantité est indépendante de  $\Omega$  ; en effet, si nous changeons les couplages de la partie de fixation de jauge d’une quantité  $\delta\Omega$ , la valeur moyenne de  $O$  varie de :

$$\delta\langle O \rangle_\Omega = - \int [d\phi][dc][d\bar{c}][dB] O s\delta\Omega[\phi, \bar{c}, c, B] \exp(-\mathcal{S}_{\text{YM}}[\phi] - s\Omega[\phi, \bar{c}, c, B]) \quad (\text{II.116})$$

## CHAPITRE II. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Mais si la symétrie BRST n'est pas spontanément brisée, nous avons  $\langle \delta U \rangle = 0$  pour un opérateur  $U$  quelconque, soit ici  $\delta \langle O \rangle_\Omega = 0$ . Nous pouvons donc librement varier  $\Omega$  sans changer la valeur moyenne des opérateurs invariants de jauge. En particulier nous choisissons  $\Omega=0$ , auquel cas les fantômes ne contribuent à  $\delta \langle O \rangle$  que par les termes d'intégration, dont la résultante est nulle. Par conséquent, la valeur moyenne de tout opérateur invariant de jauge est nulle !

### Non-trivialité du vide de QCD

Des résultats plus phénoménologiques ont été établis depuis 2001 à partir d'une même démarche : construire un potentiel effectif renormalisable multiplicativement dépendant de la valeur moyenne dans le vide d'un certain opérateur, et vérifier que le minimum de ce potentiel n'est pas atteint en zéro. De ce fait, un condensat non-nul associé à l'opérateur considéré est énergétiquement favorisé dans le vide non-perturbatif de la QCD.

En 2001, Verschelde et al. ont montré, après calcul à deux boucles du potentiel effectif, que le vide de QCD privilégie  $\langle A^2 \rangle \neq 0$  ; ils évaluent une masse dynamique du gluon à 485 MeV. Cette même étude a été menée dans le cadre plus large de la jauge de Curci - Ferrari en 2003 par Dudal et al. [Dud03b]. Enfin, il a été montré que plusieurs condensats de fantômes admettent une valeur non-nulle dans le vide non-perturbatif en jauge de Landau ou dans les jauges non-linéaires [LSS02], [Lem02].

Enfin, récemment, Dudal et al. [Dud03a] ont évalué  $\langle A^2 \rangle \simeq 0,3 \text{ GeV}^2$  à l'aide d'un développement en graphe 2PPI à deux boucles.

# Chapitre Trois

---

## Instantons et vide de QCD

---

### III.1 Instantons : concepts et phénoménologie

La symétrie chirale est la symétrie globale  $U_L(n_f) \times U_R(n_f)$  du Lagrangien de la QCD écrit avec  $n_f$  saveurs de quarks de masses nulles, où les groupes  $U(n_f)$  agissent indépendamment sur les composantes droite et gauche des champs fermioniques. Cependant, au lieu d'agir séparément sur les spineurs de Weyl à deux composantes, nous pouvons considérer des transformations indépendantes, vectorielle et axiale, sous un groupe  $U(n_f)$  agissant sur les spineurs de Dirac à quatre composantes.

La symétrie axiale mélange des états de parités différentes. Si cette symétrie classique subsiste au sein de la théorie quantique, elle induit une dégénérescence des états dont les nombres quantiques ne diffèrent que par la parité. Or, ce n'est assurément pas ce qui est observé : par exemple, le méson vecteur  $\rho$  est nettement moins lourd que le méson axial  $a_1$  ; en effet, explicitement  $m_{a_1} - m_\rho \simeq 1200 \text{ MeV} - 770 \text{ MeV} \simeq 400 \text{ MeV}$ . Cet écart est beaucoup trop grand pour être interprété par les seules masses des quarks légers qui brisent la symétrie chirale. Nous en déduisons que la symétrie chirale de la QCD est spontanément brisée.

Nous avons rappelé SEC. I.2.2 que symétrie de jauge et symétrie chirale s'accordent difficilement lors de la régularisation d'une théorie de champs. Plus précisément, nous avons vu que les répliques d'un champ fermionique sur réseau font explicitement disparaître l'anomalie axiale. Dans la mesure où nous étudions des instantons sur réseau, il est intéressant de rappeler le mécanisme de l'anomalie axiale, et le rôle des instantons dans un scénario reconnu de brisure spontanée de la symétrie chirale.

### III.1.1 Anomalie axiale

Rappelons l'expression de la fonction de partition de la QCD<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}
 Z &= \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left( - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} \right) \\
 &= \int [dA] \prod_{\text{saveurs } q} [d\psi_q][d\bar{\psi}_q] \exp \left( i \int d^4x \left[ \sum_{\text{saveurs } q} \bar{\psi}_q (i \not{D} - m_q) \psi_q \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right] \right) \\
 &= \int [dA] \exp \left( -i \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right) \prod_{\text{saveurs } q} Z[A, q] \tag{III.1}
 \end{aligned}$$

où nous notons :

$$\begin{aligned}
 Z[A, q] &= \int [d\psi_q][d\bar{\psi}_q] \exp \left( i \int d^4x \bar{\psi}_q (i \not{D}[A] - m_q) \psi_q \right) \\
 &= \det(-\not{D}[A] - im_q) \tag{III.2}
 \end{aligned}$$

la contribution à l'intégrale de chemin d'une saveur de quarks. L'intégration sur les configurations de champ de jauge est une moyenne, au sens d'une mesure donnée par le Lagrangien de la théorie "pure jauge", du déterminant fermionique. Nous l'écrivons<sup>2</sup> :

$$Z_q = \langle \det(-\not{D}[A] - im_q) \rangle \tag{III.3}$$

Ceci va nous permettre de nous concentrer sur la contribution à la fonction de partition de la QCD d'une saveur de quark unique avant de généraliser.

Nous nous restreignons tout d'abord au cas d'une saveur de masse nulle. Suivant l'exposé de [Wei96], prenons une transformation chirale locale agissant sur les champs fermioniques  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  selon<sup>3</sup> :

$$\psi'(x) = U(x)\psi(x) = \exp \left( i\gamma_5 \epsilon(x) \right) \psi(x) = \exp \left( i\gamma_5 \epsilon(x) \right)_n \psi_m(y) \delta_{nm} \delta^{(4)}(x - y) \tag{III.4}$$

où  $n, m$  sont des indices de spineurs de Dirac. Désignons par :

$$J_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \tag{III.5}$$

---

1. Nous laissons ici de côté les termes sources afin d'alléger l'écriture.  
 2. Ultérieurement, nous moyennons aussi  $Z$  sur un ensemble d'instantons.  
 3. Il est nécessaire de prendre  $\epsilon$  dépendant de  $x$  pour calculer la divergence du courant de Noether associé dans ce formalisme.

### III.1. INSTANTONS : CONCEPTS ET PHÉNOMÉNOLOGIE

le courant de Noether associé à la transformation globale. Sous l'effet de la transformation locale, le Lagrangien est changé en :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QCD}} - J_\mu^5(x) \partial_\mu \epsilon(x) - 2im\epsilon(x) \bar{\psi} \gamma_5 \psi(x) \quad (\text{III.6})$$

La jacobienne associée à cette transformation est  $\mathcal{J} = (\det U)^{-2}$ , soit :

$$\mathcal{J} = \left( \exp \text{Tr} \left( i\epsilon(x) \gamma_5 \delta^{(4)}(x-y) \delta_{nm} \right) \right)^{-2} \quad (\text{III.7})$$

où la trace “Tr” porte aussi bien sur les points d'espace-temps que les indices de Dirac et de couleur. Enoncé différemment, la mesure de l'intégrale de chemin se transforme de la manière suivante :

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \mapsto \exp \left( i \int d^4x \epsilon(x) \mathcal{A}(x) \right) [d\psi][d\bar{\psi}] \quad (\text{III.8})$$

où  $\mathcal{A}$  est la fonction anormale :

$$\mathcal{A}(x) = -2(\text{tr} \gamma_5) \delta^{(4)}(x-y) \Big|_{y=x} \quad (\text{III.9})$$

La trace “tr” ne porte cette fois que sur les indices de Dirac et de couleur. Nous remarquons tout de suite l'ambiguïté a priori embarrassante de cette expression : le second membre est le produit d'un terme nul par un terme infini. Nous choisissons de la régulariser en préservant l'invariance de jauge au moyen d'une coupure  $M$  sur les valeurs propres de grand module de l'opérateur de Dirac en notant [Fuj79] :

$$\mathcal{A}_M(x) = -2\text{tr} \left( \gamma_5 \exp \left( -\frac{\not{D}^2}{M^2} \right) \right) \delta^{(4)}(x-y) \Big|_{y=x} \quad (\text{III.10})$$

En utilisant la linéarité de la transformée de Fourier en  $(x-y)$ , nous pouvons transcrire cette expression en termes d'impulsions :

$$\mathcal{A}_M(x) = -2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma_5 \exp \left( -\frac{\not{D}^2}{M^2} \right) e^{ik(x-y)} \Big|_{y=x} \quad (\text{III.11})$$

Rappelons alors que :

$$\not{D}^2 = D^2 - \frac{g}{4} i t_a F_a^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{III.12})$$

si bien que l'anomalie régularisée s'écrit :

$$\mathcal{A}_M(x) = -2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma_5 \exp \left( -\frac{1}{M^2} \left( D^2 - \frac{g}{4} i t_a F_a^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) \right) e^{ik(x-y)} \Big|_{y=x} \quad (\text{III.13})$$



### CHAPITRE III. INSTANTONS ET VIDE DE QCD

Nous pouvons extraire le terme  $\partial^2$  de  $D^2$  ; comme il commute avec les autres opérateurs, il est possible de séparer en deux exponentielles les termes dépendant du champ de jauge et les autres :

$$\mathcal{A}_M(x) = -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma_5 e^{-\frac{\partial^2}{M^2}} \exp \left[ -\frac{1}{M^2} (\partial \cdot A + 2A \cdot \partial + A^2 + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu}) \right] e^{ik(x-y)} \Big|_{y=x} \quad (\text{III.14})$$

$$= -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-\frac{k^2}{M^2}} \text{tr} \gamma_5 \exp \left[ -\frac{1}{M^2} (\partial \cdot A + 2A \cdot \partial + A^2 + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu}) \right] e^{ik(x-y)} \Big|_{y=x} \quad (\text{III.15})$$

Dans cette dernière équation, faisons le changement de variables  $k \mapsto Mk$  :

$$\mathcal{A}_M(x) = -2M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \text{tr} \gamma_5 \exp \left[ -\frac{1}{M^2} (\partial \cdot A + 2A \cdot \partial + A^2 + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu}) \right] e^{iMk(x-y)} \Big|_{y=x} \quad (\text{III.16})$$

Le terme exponentiel contenant des champs de jauge se développe en :

$$\begin{aligned} \exp(\dots) &= 1 - \frac{1}{M^2} \left( \partial \cdot A + 2A \cdot \partial + A^2 + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} \right) \\ &\quad + \frac{1}{M^4} \left( \partial \cdot A + 2A \cdot \partial + A^2 + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} \right)^2 \\ &\quad + \mathcal{O} \left( \frac{1}{M^5} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Le terme “1” va disparaître avec la trace de  $\gamma_5$ . De plus, il faut au moins quatre matrices  $\gamma$  pour obtenir une trace<sup>4</sup> de type  $\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_l})$  non nulle, donc les termes en  $\frac{1}{M^2}$  et  $\frac{1}{M^4}$  sont nuls, sauf  $\frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu}$ . Les seuls termes provenant de  $e^{iMk(x-y)} \Big|_{y=x}$  qui pourraient contribuer seraient en  $2A \cdot \partial e^{iMk(x-y)} \Big|_{y=x} = 2iAkM$ . Ils sont supprimés tant qu’ils ne sont pas multipliés par au moins quatre matrices  $\gamma$ , donc ils ne peuvent intervenir que par des termes au moins en  $\frac{1}{M^6}$  de (III.17), produisant une contribution commune en  $\frac{1}{M^5}$  nulle à la limite de régulateur infini dans (III.16). De manière générale, les termes en  $\frac{1}{M^n}$  pour  $n \geq 5$  de (III.17) disparaissent de (III.16) lorsque  $M \rightarrow \infty$ . L’expression finale

---

4. Nous parlons ici de la trace usuelle sur les indices de Dirac.

### III.1. INSTANTONS : CONCEPTS ET PHÉNOMÉNOLOGIE

de l'anomalie est donc :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(x) = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_a^{\mu\nu} F_b^{\rho\sigma} \text{Tr}(t_a t_b) = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\rho\sigma} \quad (\text{III.18})$$

Cette quantité porte le nom de *densité de Chern-Pontryagin*. Elle montre qu'une transformation chirale globale de paramètre  $\epsilon$  est équivalente au remplacement dans le Lagrangien (I.1) de l'angle  $\theta$  du vide par  $\theta - 2\epsilon$  tout en laissant inchangés les champs fermioniques. Compte-tenu de (III.1) et (III.6), rajouter les masses des quarks en supposant faiblement brisée la symétrie chirale<sup>5</sup>, permet d'écrire :

$$\partial_\mu J_\mu^5(x) = 2i(m_u \bar{u} \gamma_5 u + m_d \bar{d} \gamma_5 d + m_s \bar{s} \gamma_5 s) + \frac{3\alpha_s}{8\pi} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} \quad (\text{III.19})$$

en notant  $\tilde{F}^{a\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a$  le dual du tenseur de courbure.

Il est possible d'écrire autrement l'anomalie chirale. Remarquons que l'opérateur de Dirac euclidien de masse nulle  $i\mathcal{D}$  est hermitien, donc diagonalisable en base orthonormée ; nous notons  $(\phi_\kappa)_\kappa$  ses vecteurs propres normalisés et  $\lambda_\kappa$  la valeur propre associée au vecteur  $\phi_\kappa$  ; il s'agit d'un réel. La somme des projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces propres d'un opérateur hermitien n'est autre que l'identité, soit :

$$\sum_\kappa \phi_\kappa(x) \phi_\kappa^\dagger(y) = \delta^{(4)}(x - y) \mathbb{I} \quad (\text{III.20})$$

Introduisons cette quantité dans (III.10) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M(x) &= -2\text{Tr} \left( \gamma_5 \exp \left( -\frac{\mathcal{D}^2}{M^2} \right) \sum_\kappa \phi_\kappa(x) \phi_\kappa^\dagger(x) \right) \\ &= -2 \sum_\kappa \exp \left( -\frac{\lambda_\kappa^2}{M^2} \right) \phi_\kappa^\dagger(x) \gamma_5 \phi_\kappa(x) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Considérons maintenant les valeurs propres  $\lambda_\kappa$  non nulles. En vertu de  $\{i\mathcal{D}, \gamma_5\} = 0$ ,  $\gamma_5 \phi_\kappa$  est un vecteur propre de  $i\mathcal{D}$  associé à la valeur propre  $-\lambda_\kappa \neq \lambda_\kappa$  donc orthogonal à  $\phi_\kappa$ . Par conséquent :

$$\int d^4x \phi_\kappa^\dagger(x) \gamma_5 \phi_\kappa(x) = 0 \quad (\text{III.22})$$

---

5. Cette hypothèse est encore raisonnable pour les quarks légers. De plus le calcul fait précédemment tient compte des divergences ultra-violettes, et les masses relèvent du domaine de l'infra-rouge, si bien que le calcul de l'anomalie n'est vraisemblablement pas modifié.

dès que  $\lambda_\kappa \neq 0$ , et les vecteurs propres de  $i\mathcal{D}$  qui vont contribuer à (III.21) sont dans le noyau de l'opérateur de Dirac. Comme  $i\mathcal{D}$  commute avec  $\gamma_5$ , il est possible de classer les modes zéros de l'opérateur de Dirac en fonction de leur chiralité. En utilisant la normalisation des vecteurs propres, l'anomalie s'écrit<sup>6</sup> :

$$\int d^4x \mathcal{A}(x) = 2(n_+ - n_-) \quad (\text{III.23})$$

où  $n_+$  et  $n_-$  désignent le nombre de modes zéros respectivement droits et gauches. Tout ceci aboutit au *théorème de l'indice de Atiyah-Singer* [AS84] :

$$\frac{g^2}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_a^{\rho\sigma} = n_+ - n_- \quad (\text{III.24})$$

Cette quantité est un invariant topologique : elle reste constante, égale à un entier, sous des variations continues du champ de jauge. Les valeurs qu'elle prend vont permettre de classer les différentes topologies des configurations de champ de jauge.

### III.1.2 Brisure spontanée de la symétrie chirale

Suivant [Dia96], explicitons le déterminant fermionique de (III.2) ; nous utilisons à nouveau le fait que les valeurs propres non-nulles de l'opérateur de Dirac euclidien  $i\mathcal{D}[A]$  viennent par paires de signes opposées<sup>7</sup> :

$$\begin{aligned} \det(i\mathcal{D}[A] + im_q) &= \prod_{\kappa} (\lambda_{\kappa} + im_q) = \sqrt{\prod_{\kappa} (\lambda_{\kappa}^2 + m_q^2)} \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \log(\lambda_{\kappa}^2 + m_q^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Nous prenons en compte la continuité du spectre de l'opérateur de Dirac<sup>8</sup> en introduisant *formellement*<sup>9</sup> la *densité spectrale* de l'opérateur de Dirac :

$$\nu(\lambda) = \sum_{\kappa} \delta(\lambda - \lambda_{\kappa}) \quad (\text{III.26})$$

---

6. Le résultat précédent, établi dans le formalisme minkowskien, est toujours valide car le facteur “i” introduit dans la dérivée spatiale compense le “i” multipliant la composante temporelle du champ de jauge.

7. Nous oublions le problème de normalisation posé par le signe “-” global.

8. Nous devons nous attendre à une continuité du spectre dès que nous ne raisonnons plus sur une théorie à volume fini.

9. La notation utilisée est impropre.

### III.1. INSTANTONS : CONCEPTS ET PHÉNOMÉNOLOGIE

si bien que (III.25) s'écrit :

$$\det(i\mathcal{D}[A] + im_q) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \nu(\lambda) \log(\lambda^2 + m_q^2) \right] \quad (\text{III.27})$$

Le condensat chirale associé à une saveur  $q$  est :

$$\langle \psi_q \bar{\psi}_q \rangle_{\text{Minkowskien}} = -i \langle \psi_q \psi_q^\dagger \rangle_{\text{Euclidien}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial m_q} \log Z_q \Big|_{m_q \rightarrow 0} \quad (\text{III.28})$$

où  $Z_q = \langle \det(i\mathcal{D}[A] + im_q) \rangle$  est moyenné sur le champ de jauge. Exprimé en fonctions des valeurs propres de l'opérateur de Dirac, il s'écrit :

$$\langle \psi_q \bar{\psi}_q \rangle = -\frac{1}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \nu(\lambda) \frac{m_q}{\lambda^2 + m_q^2} \quad (\text{III.29})$$

A la limite de volume infini, nous obtenons :

$$\frac{m_q}{\lambda^2 + m_q^2} \xrightarrow{m_q \rightarrow 0} \text{sign}(m_q) \pi \delta(\lambda) \quad (\text{III.30})$$

d'où la formule de Banks-Casher [BC80] :

$$\langle \psi_q \bar{\psi}_q \rangle = -\frac{\pi}{V} \text{sign}(m_q) \nu(0) \quad (\text{III.31})$$

Cette expression est essentielle car elle relie un paramètre d'ordre de la brisure de la symétrie chirale à la densité spectrale en zéro de l'opérateur de Dirac. Remarquons en effet que le condensat chirale  $\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle$  est une boucle de quark fermée, i.e. :

$$\langle \psi_q \bar{\psi}_q \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{Z(k)}{M(k) - \not{k}} \quad (\text{III.32})$$

Si le terme de masse du propagateur du quark est nul, la trace du terme en  $\not{k}$  est nulle elle aussi, et donc le condensat chirale. Ainsi, si le condensat n'est pas nul, le quark dispose d'une masse engendrée dynamiquement. Par suite, la densité spectrale de l'opérateur de Dirac est non-nulle en zéro en vertu de la brisure spontanée de la symétrie chirale.

#### III.1.3 L'instanton de Belavin, Polyakov, Schwartz et Tiupkin (BPST)

Les instantons sont des solutions des équations classiques  $D_\mu^{ab} F_{\mu\nu}^b = 0$  dans l'espace euclidien, exhibées initialement par Belavin, Polyakov, Schwartz et Tiupkin [Bel75], puis par 't Hooft [tHo76a], [tHo76b].

### CHAPITRE III. INSTANTONS ET VIDE DE QCD

Nous traiterons ici le cas de la QCD “pure jauge”. Nous adoptons la notation traditionnelle de la littérature sur les instantons<sup>10</sup> [SS96]. L’action de Yang-Mills devient :

$$\mathcal{S}_{\text{YM}} = \frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (\text{III.33})$$

Le champ *dual* de la courbure  $F_{\mu\nu}$  est :

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma a} \quad (\text{III.34})$$

La charge topologique s’écrit :

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} \quad (\text{III.35})$$

Le terme intégré est la divergence d’un quadrivecteur :

$$K_\mu = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left( A_\nu^a \partial_\rho A_\sigma^a + \frac{1}{3} \epsilon^{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c \right) \quad (\text{III.36})$$

Dans la théorie  $SU(2)$ , le champ de jauge engendré par un *instanton* dans la jauge de Landau singulière<sup>11</sup> est :

$$A_\mu^{(\text{I})a} = \frac{2\bar{\eta}_{a\mu\nu} x_\nu \rho^2}{x^2(x^2 + \rho^2)} \quad (\text{III.37})$$

Le symbole  $\eta$  est défini par :

$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu} & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ \delta_{a\mu} & \nu = 4 \\ -\delta_{a\nu} & \mu = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{\eta}_{a\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu} & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ -\delta_{a\mu} & \nu = 4 \\ +\delta_{a\nu} & \mu = 4 \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Le champ d’un instanton est une solution auto-duale des équations du mouvement, i.e.  $F_{\mu\nu}^a = \tilde{F}_{\mu\nu}^a$ . L’*anti-instanton* est anti-auto-dual, et vérifie :

$$A_\mu^{(\text{A})a} = \frac{2\eta_{a\mu\nu} x_\nu \rho^2}{x^2(x^2 + \rho^2)} \quad (\text{III.39})$$

L’instanton a une charge topologique 1, et l’anti-instanton une charge -1. L’action d’une configuration de champ instantonique est :

$$\mathcal{S}_{\text{YM}} = -\frac{8\pi}{g^2} \quad (\text{III.40})$$

---

10. La notation perturbative standard correspond au changement de variables  $A_\mu \rightarrow gA_\mu$ .

11. Pour que l’intégrale d’une divergence soit non-nulle, il faut que le terme dont on considère la divergence admette une singularité. Nos simulations sur réseaux montrent explicitement que la fixation de la jauge de Landau par minimisation de  $\int d^4x A^2$  place la singularité au centre de l’instanton.

### III.1. INSTANTONS : CONCEPTS ET PHÉNOMÉNOLOGIE

ce qui fait d'un instanton un objet échappant intrinsèquement à la théorie de perturbations. Un instanton correspond à un minimum de l'action ; en effet, considérant :

$$0 \leq \int d^4x (F_{\mu\nu}^a - \tilde{F}_{\mu\nu}^a)^2 = \int d^4x (2F^2 - 2F\tilde{F}) = 8g^2\mathcal{S} - 64\pi^2Q \quad (\text{III.41})$$

il vient :

$$\mathcal{S} \geq \frac{8\pi^2}{g^2}Q \quad (\text{III.42})$$

L'action minimale d'une trajectoire à charge topologique unité est donc  $\frac{8\pi^2}{g^2}$ , et provient d'une configuration de champ auto-duale. Ceci signifie aussi que cette configuration de champ est une solution des équations du mouvement de Yang-Mills.

Il est possible de plonger l'instanton BPST de  $SU(2)$  dans le groupe de jauge  $SU(N)$ . Introduisons alors les matrices  $2 \times 2$

$$\tau_\mu^\pm = (\pm i \vec{\tau}, 1) \quad (\text{III.43})$$

vérifiant :

$$\tau^a \tau^b = \delta^{ab} + i\epsilon^{abc} \tau^c \quad (\text{III.44})$$

$$\tau_\mu^+ \tau_\nu^- = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{a\mu\nu} \tau^a \quad (\text{III.45})$$

$$\tau_\mu^- \tau_\nu^+ = \delta_{\mu\nu} + i\bar{\eta}_{a\mu\nu} \tau^a \quad (\text{III.46})$$

Le champ d'un instanton de centre  $z_\mu$ , de taille  $\rho$  et d'orientation  $U$  dans l'espace de couleur s'écrit :

$$A_\mu^a = \frac{2\rho^2 O^{ab} \bar{\eta}_{\nu b}^\mu (x - z)_\mu}{(x - z)^2 [\rho^2 + (x - z)^2]} \quad (\text{III.47})$$

avec :

$$O^{ab} = \text{Tr}(U^\dagger \tau^a U \tau^b) \quad \text{et} \quad O^{ab} O^{ac} = \delta^{bc} \quad (\text{III.48})$$

#### III.1.4 Modèle de liquide d'instantons

Formellement, la somme de deux instantons n'est plus une solution classique à cause des termes non-linéaires des équations du mouvement. Par contre, si le recouvrement des structures instantoniques est faible, l'ensemble des deux instantons considérés est en bonne approximation une solution classique. Ceci ouvre la voie à la description en termes d'instantons de configurations de champ de jauge de charge topologique  $Q \notin \{-1, +1\}$ .

### CHAPITRE III. INSTANTONS ET VIDE DE QCD

Les *modèles de gaz ou de liquide d'instantons* décrivent le vide de QCD en tant que collection d'instantons (BPST ou légèrement déformés, notamment à l'aide d'un principe variationnel [DP84]) plus ou moins diluée ; en fait, nous parlons de gaz d'instantons si l'ensemble des instantons pris en compte est très dilué, et de liquide si la dilution est moindre. Les estimations phénoménologiques indiquent que le vide de la QCD s'apparenterait plutôt à un liquide d'instantons [Shu82a], [Shu82b], [Shu82c].

Les règles de somme de la QCD nous apprennent la valeur du condensat gluonique renormalisé à 1 GeV [SVZ78a], [SVZ78b] et [Nar95] :

$$\frac{1}{32\pi^2} \langle F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \rangle \simeq (200 \text{ MeV})^4 \quad (\text{III.49})$$

$N$  instantons dans un volume  $V$  apportent au condensat gluonique une contribution :

$$\langle F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \rangle V = \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \simeq 32\pi^2 N \quad (\text{III.50})$$

d'où nous déduisons la distance moyenne  $\bar{R}$  entre deux instantons :

$$\bar{R} = \left( \frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq \frac{1}{200 \text{ MeV}} = 1 \text{ fm} \quad (\text{III.51})$$

Une estimation similaire de cette même quantité provient de la formule de Veneziano-Witten [Ven79], [Wit79] :

$$\chi_t = \lim_{V \rightarrow +\infty} \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} = \frac{f_\pi^2}{2n_f} (m_\eta^2 + m_{\eta'}^2 - 2m_K^2) \simeq (180 \text{ MeV})^4 \quad (\text{III.52})$$

qui explique pourquoi  $m_\eta^2 + m_{\eta'}^2 - 2m_K^2 \neq 0$  ; cette quantité aurait dû être nulle sans l'anomalie  $U_A(1)$ . La charge topologique dans un volume  $V$  est la différence du nombre d'instantons  $n_I$  et du nombre d'anti-instantons  $n_A$ . Pour un système à statistique poissonnienne, ce qui semble le cas du liquide d'instantons [SS96], les fluctuations du nombre d'instantons et d'anti-instantons vérifient  $\Delta n_I \simeq \sqrt{n_I}$  et  $\Delta n_A \simeq \sqrt{n_A}$ . Ainsi, la charge topologique est proportionnelle à  $\frac{n_I + n_A}{V}$ , d'où une estimation de la densité du liquide.

Enfin des évaluations sur réseau [Neg98] obtiennent des résultats comparables :

$$\bar{\rho} \simeq 0,36 \text{ fm} \quad \text{et} \quad \bar{R} \simeq 0,89 \text{ fm} \quad (\text{III.53})$$

où  $\bar{\rho}$  est le rayon moyen d'un instanton. La part de volume ("*packing fraction*") occupé par les instantons est plutôt petite :

$$\frac{\pi^2 \bar{\rho}^4}{\bar{R}^4} \simeq \frac{1}{8} \quad (\text{III.54})$$

### III.1. INSTANTONS : CONCEPTS ET PHÉNOMÉNOLOGIE

et justifie le recours à l'image semi-classique de gaz ou de liquide d'instantons. Il s'agit en fait plutôt d'un liquide dans la mesure où les interactions entre instantons ne sont pas négligeables [SS96].

Un succès de ce type de modèle est d'offrir un mécanisme naturel de la brisure spontanée de la symétrie chirale [DP84]. En effet, en vertu de la formule de Banks-Casher (III.31), il suffit de montrer que les instantons créent une densité spectrale non-nulle en zéro.

Le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer nous enseigne déjà que l'opérateur de Dirac sur un fond d'instantons admet au moins un mode zéro. Le problème est de voir comment cela se traduit dans la densité spectrale à la limite de volume infini. Ecrivons l'opérateur de Dirac sur une base constituée des modes zéros  $\psi_{0,IouA}$  :

$$i\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & T_{IA} \\ T_{AI} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.55})$$

où  $T_{IA} = -T_{AI}$  représente le recouvrement d'un instanton et d'un anti-instanton :

$$T_{IA} = \int d^4x \psi_{0,I}^\dagger(x - z_I) i\mathcal{D} \psi_{0,A}(x - z_A) \quad (\text{III.56})$$

Les éléments de matrice entre structures instantoniques de même charge  $T_{II}$  et  $T_{AA}$  s'annulent par chiralité. Si l'instanton et l'anti-instanton sont très séparés, leur recouvrement se comporte en :

$$T_{IA} \simeq \frac{2\rho_I\rho_A}{(z_I - z_A)^4} (z_I - z_A)_\mu \text{Tr}(U_A \tau_\mu^+ U_I^\dagger) \quad (\text{III.57})$$

soit une décroissance comme l'inverse du cube de la distance de séparation. L'opérateur de Dirac (III.55) sur un fond constitué d'un instanton et d'un anti-instanton admet alors les valeurs propres  $\pm|T_{IA}|$ , i.e. l'interaction entre les instantons a transformé les modes zéros dus à chacun en modes proches de zéros, d'autant plus proches en fait que les structures considérées sont éloignées l'une de l'autre. Si nous rajoutons d'autres instantons et anti-instantons, ceux-ci vont donner à l'opérateur de Dirac un autre couple de valeurs propres petites mais non-nulles. Ces valeurs propres continuent de se répartir de part et d'autre de zéro. La collection complète de structures instantoniques crée finalement une bande continue avec une densité spectrale  $\nu(\lambda)$  non-nulle en zéro. Il est possible d'estimer le condensat chirale engendré par  $N$  instantons dans un volume  $V$  [Dia96] :

$$\Delta^2 = \frac{N}{V} \int d^4z_{IA} dU_{IA} |T_{IA}|^2 \simeq 6,62 \frac{N\bar{\rho}^2}{VN_c} \quad (\text{III.58})$$



pour un instanton de  $SU(N)$ . Appliqué à la relation de Banks-Casher (III.31), ceci donne :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{\pi}{V}\nu(0) \simeq -\frac{\pi}{V}\frac{N}{\Delta} \simeq -\frac{1}{R^2\bar{\rho}}\sqrt{\frac{N_c}{6,62}} \simeq (260 \text{ MeV})^3 \quad (\text{III.59})$$

en excellent accord avec l'ordre de grandeur issues des règles de somme de la QCD :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \simeq (250 \text{ MeV})^3 \quad (\text{III.60})$$

où le condensat chirale est pris renormalisé à 1 GeV.

La densité spectrale de l'opérateur de Dirac doit donc ressembler à l'allure de la FIG. III.1. Pour des raisons dimensionnelles, la densité spectrale de la théorie libre est  $\nu(\lambda) = C|\lambda|^3$  ; la propriété de liberté asymptotique assure qu'il s'agit du régime de la théorie en interaction aux grands modes. Les modes presque nuls sont dûs aux instantons. La ligne en pointillés est une estimation du spectre complet de l'opérateur de Dirac.

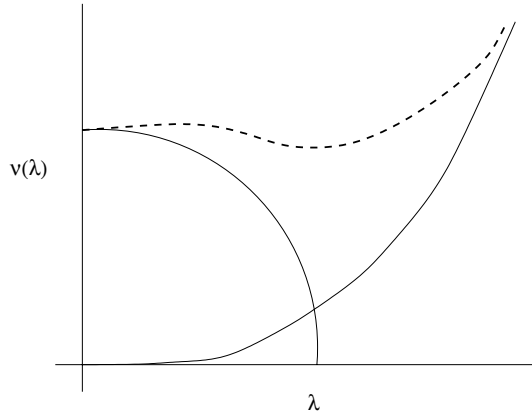


FIG. III.1 —: *Allure de la densité spectrale de l'opérateur de Dirac. Figure extraite de [Dia96]. Le quart de cercle montre la contribution des instantons à la densité spectrale de l'opérateur de Dirac. L'autre ligne pleine représente la densité spectrale de la théorie libre. Enfin, la courbe en pointillés reproduit l'allure de la densité spectrale de la théorie en interactions.*

## III.2 Sonder la structure du vide par les fonctions de Green

### III.2.1 Procédure de refroidissement (“cooling”)

La procédure de refroidissement comporte plusieurs variantes, mais le principe de base demeure le même [Tep97] : transformer une configuration de jauge en éliminant les fluctuations ultra-violettes du champ de sorte à ne garder que les contributions de basse énergie. Nous nous attendons à ce que la partie subsistante du spectre révèle la topologie de la configuration étudiée.

Les instantons sont des solutions correspondant à des minima de l'action ; la procédure à adopter pour résoudre les structures instantoniques doit donc idéalement minimiser l'action de la configuration. Pratiquement, la contribution d'un lien du réseau à l'action est :

$$\delta\mathcal{S}_U = \beta \left( 1 - \frac{1}{6N} \text{Re}(\text{Tr}(U\xi)) \right) \quad (\text{III.61})$$

où  $\xi(x,\mu)$  est une matrice  $3 \times 3$  telle que  $U\xi$  est la somme des six plaquettes (à quatre dimensions d'espace-temps) auxquelles contribuent  $U(x,\hat{\mu})$ .

Dans  $SU(2)$ , il existe un candidat naturel au remplacement de  $U(x,\hat{\mu})$  minimisant  $\delta\mathcal{S}_U$ , qui n'est autre que  $\frac{\xi^\dagger(x,\mu)}{\det \xi(x,\mu)}$ . A chaque étape de la procédure de refroidissement, nous remplaçons chaque lien  $U$  par  $\frac{\xi^\dagger(x,\mu)}{\det \xi(x,\mu)}$  ; nous moyennons ainsi chaque lien avec ses plus proches voisins. Cet algorithme est par conséquent local ; qualitativement, les liens d'un réseau de maille  $a$  atteints après  $n_c$  itérations sont à une distance  $\sqrt{n_c}a$  du lien initialement modifié [RS99]. Ce type de lissage par convolution permet de supprimer progressivement les oscillations ultra-violettes.

Durant cette procédure, les charges topologiques de signes opposés s'annulent progressivement, changeant ainsi la densité de charge topologique, mais pas la charge topologique totale. Cependant, son itération engendre un rétrécissement des instantons dont la taille va devenir de l'ordre du régulateur, i.e. la maille du réseau ; à ce stade, les instantons vont “disparaître dans l'ultra-violet”, et la charge topologique va diminuer. Précisons cependant que la disparition des instantons dans l'ultra-violet est le processus le plus lent se produisant ; la tendance générale est plutôt à l'augmentation du rayon moyen, et à l'annihilation par interaction entre instantons et anti-instantons, qui constitue le processus le plus rapide. L'évolution d'une configuration typique pendant le refroidissement est présentée FIG. III.2. Cette procédure est donc efficace pour extraire la topologie d'une configuration, bien qu'elle ne se contente pas de supprimer les fluctuations ultra-violettes. A terme, l'ensemble des données

### CHAPITRE III. INSTANTONS ET VIDE DE QCD

sont modifiées, et des informations physiques sont perdues. Il est donc nécessaire d’une part de travailler à faible nombre d’itérations de la procédure de refroidissement, d’autre part de contrôler les artefacts éventuellement induits par ce mécanisme.

Une complication apparaît dès que nous quittons le groupe de jauge  $SU(2)$  pour  $SU(N)$  avec  $N \geq 2$  ; dans ce cas  $\xi(x, \mu)$  cesse d’appartenir à  $SU(N)$ , et il faut procéder différemment. Nous avons employé une procédure dite “*under-relaxed cooling*” [ST98], qui consiste cette fois à remplacer  $U(x, \hat{\mu})$  par :

$$U'(x, \hat{\mu}) = c \left( \alpha U(x, \hat{\mu}) + \xi^\dagger(x, \mu) \right) \quad (\text{III.62})$$

où  $c$  est une constante de normalisation assurant que la matrice  $U'(x, \hat{\mu})$  est unitaire, et  $\alpha \geq 0$  un paramètre libre contrôlant la vitesse d’exécution de l’algorithme. Nous n’obtenons plus nécessairement de minimum de l’action, voire, si le lien initial était suffisamment froid (i.e. suffisamment près d’un minimum de  $\delta \mathcal{S}_U$ ), nous pouvons obtenir une action plus élevée. Cet inconvénient peut être évité si nous rejetons les modifications conduisant à une action plus grande. Par ailleurs, nous avons vérifié que le signal extrait des configurations refroidies ne dépendait plus du paramètre  $\alpha$ . Enfin, les résultats obtenus dans [Bou02a] sont qualitativement en accord avec ceux issus d’une variante, le *refroidissement amélioré* (“*improved cooling*”) [For97a], confortant ainsi la validité de la démarche.

Un débat quant à la pertinence des instantons pour reproduire les fluctuations de la charge topologique en QCD a été ouvert récemment [Edw01]. Le point de départ est une remarque de Witten [Wit79] selon laquelle l’approximation de grand nombre de couleurs  $N$  est incompatible avec la phénoménologie des instantons. En effet, cette dernière prédit une décroissance exponentielle de  $m_\eta^2$  en  $N$ , alors que l’approximation “grand  $N$ ” attend un comportement en inverse de  $N$ .

Horvath et al. [Hor01] ont testé cette conjecture en mesurant localement la chiralité des modes non-nuls de l’opérateur de Dirac des fermions de Wilson. Dans un modèle de liquide d’instantons, ces modes sont essentiellement des combinaisons linéaires de fonctions d’ondes de modes zéro centrées sur chaque structure instantonique de la configuration. La chiralité apparaissant aléatoire dans leur étude, les auteurs ont conclu que les instantons jouaient un rôle secondaire dans la topologie du vide de la QCD.

L’importance de ce résultat est double : au-delà du test de la conjecture de Witten, il oppose deux démarches d’étude des propriétés topologiques du vide de la QCD. D’une part Horvath et al. étudient le spectre de l’opérateur de Dirac, et extraient des informations indirectes sur la structure du vide (sans altérer les configurations prises en compte) qui vont à l’encontre du modèle

### III.2. SONDER LA STRUCTURE DU VIDE

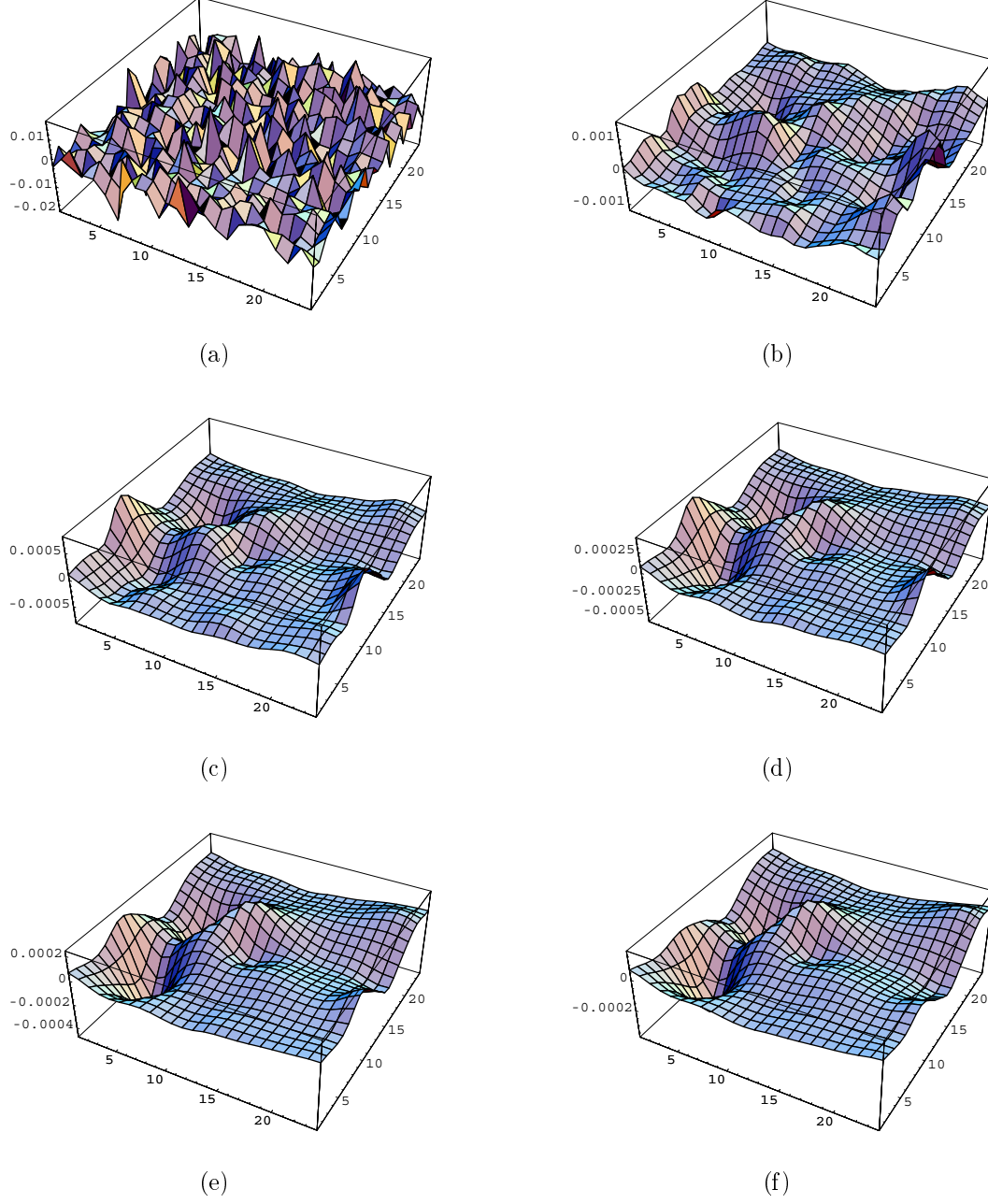


FIG. III.2 –: *Lissage des fluctuations du champ de jauge ( $\beta=6,0$ ) par application de la procédure de refroidissement. La quantité  $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$  est représentée toutes les cinq itérations de la procédure de refroidissement.*

de liquide d'instantons. D'autre part la phénoménologie de ce modèle a été amplement testée et confirmée sur réseau au moyen de la procédure de refroidissement. Ce paradoxe suggère un manque de contrôle lors des modifications des configurations.

De nombreux travaux ont repris les calculs de Horvath et al. à l'aide d'actions au meilleur comportement chirale, par exemple de Grand et Hasenfratz [GH01], ou Edwards et Heller [EH01] avec des "overlap fermions". Leurs données indiquent clairement une chiralité des petits modes en accord avec la phénoménologie instantonique ; le signal de chiralité est parfois obscurci par des contributions ultra-violettes.

Hip et al. [Hip01] proposent une explication de ce désaccord en utilisant les opérateurs de Dirac-Wilson avec et sans amélioration en  $\mathcal{O}(a^2)$  : à maille  $a \neq 0$ , ces opérateurs ne sont pas normaux, et ne peuvent pas être diagonalisés en même temps que leur adjoint par une transformation unitaire. La prise en compte de cet artefact indique de manière précise des structures chirales compatibles avec une influence dominante des instantons sur les fluctuations de la charge topologique.

Quoi qu'il en soit, des travaux récents de Cundy, Teper et Wenger [CTW02] montrent que la chiralité locale des modes presque nuls s'évanouit à la limite grand  $N$ , et que cette annulation n'est pas due à la disparition des petits instantons à grand  $N$ . Ceci signifie que le débat n'est pas encore tranché, et que d'autres études sont nécessaires pour l'éclaircir.

### III.2.2 Identification des instantons

#### Reconnaissance de forme

Nous nous plaçons d'emblée dans le cadre de l'instanton BPST. La procédure d'identification des instantons que nous appliquons [Bou02a] consiste à chercher les régions d'une configuration en champs refroidie où la densité de charge se manifeste selon le profil suivant :

$$Q_\rho(x) = \pm \frac{6}{\pi^2 \rho^4} \left( \frac{\rho^2}{x^2 + \rho^2} \right)^4 \quad (\text{III.63})$$

Nous examinons donc tous les extremas de la charge topologique évaluée sur réseau :

$$Q_{\text{Latt}}(x) = \frac{1}{2^9 \pi^2} \sum_{\pm 1}^{\pm 4} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left( \Pi_{\mu\nu}(x) \Pi_{\rho\sigma}(x) \right) \quad (\text{III.64})$$

où  $\Pi_{\mu\nu}(x)$  est la plaquette de sommets  $x$ ,  $x + a\hat{\mu}$  et  $x + a\hat{\nu}$  et  $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$  le tenseur antisymétrique corrigé d'un signe négatif pour chaque indice négatif. Nous regardons ensuite si la configuration de champs au voisinage de l'extremum est

### III.2. SONDER LA STRUCTURE DU VIDE

typique de l'instanton BPST ; pratiquement, nous opérons de la manière suivante : au voisinage d'un extremum situé en  $x_{\max}$ , nous intégrons sur tous les points tels que  $|Q_{\text{Latt}}(x)| \geq \alpha |Q_{\text{Latt}}(x_{\max})|$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  comprises entre 0,4 et 0,8. La région étudiée est alors identifiée comme caractéristique du champ d'un (anti-)instanton si le quotient :

$$\epsilon = \frac{1}{1 - 3\alpha^{\frac{1}{2}} + 2\alpha^{\frac{3}{4}}} \int_{|Q_{\text{Latt}}(x)| \geq \alpha |Q_{\text{Latt}}(x_{\max})|} d^4x Q_{\text{Latt}}(x) \quad (\text{III.65})$$

de l'intégrale évaluée sur réseau à son homologue analytique demeure constante sous variation de  $\alpha$  dans l'intervalle considéré. En effet, dans le cadre de l'instanton BPST, cette quantité vaut +1 ou -1 pour tout  $\alpha$  selon que nous observons un instanton ou un anti-instanton. Nous appelons cette procédure *reconnaissance de forme*. Afin de vérifier que l'objet identifié est véritablement un (anti-)instanton, nous testons de plus l'auto-dualité de la configuration de champs.

Cette méthode est avantageuse à plusieurs égards. Tout d'abord, elle permet d'identifier des structures instantoniques après peu d'itérations de la procédure de refroidissement, typiquement cinq. Ainsi, la configuration thermalisée originale n'est que peu déformée par le lissage des fluctuations quantiques. Par ailleurs, l'intégrale de la densité de charge topologique de l'instanton BPST ne dépendant pas de son rayon ni de sa valeur extrême, la connaissance d'une de ces deux quantités va nécessairement contraindre l'autre. Nous mesurons donc le rayon de l'instanton BPST par :

$$\frac{\rho}{a} = \left( \frac{6}{\pi^2 |Q_{\text{Latt}}(x_{\max})|} \right)^2 \quad (\text{III.66})$$

#### Propagateur du gluon

Nous commettrons l'abus de langage consistant à parler de "propagateur du gluon effectif" pour la fonction de Green à deux points du champ d'un instanton BPST, bien que cette terminologie intuitive soit ici impropre.

Notant  $\tilde{A}_\mu^{(I)a}(k)$  la transformée de Fourier du champ de l'instanton BPST pour un mode  $k$ , le propagateur du gluon effectif s'écrit, en jauge de Landau :

$$G^{(2)}(k^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) = \frac{1}{8V} \sum_a \tilde{A}_\mu^{(I)a}(k) \tilde{A}_\nu^{(I)a}(-k) \quad (\text{III.67})$$

où  $V$  désigne le volume du réseau. Nous en extrayons le facteur de forme :

$$G^{(2)}(k^2) = \frac{32\pi^4}{Vk^6} \left( 1 - \frac{(k\rho)^2}{2} K_2(k\rho) \right)^2 \quad (\text{III.68})$$

où  $K_2$  est une fonction de Bessel. Instantons et anti-instantons contribuent de la même manière.

Dans la mesure où les structures instantoniques d'une même configuration de champ sont bien séparées, il est possible de négliger l'interaction entre instantons, et donc leur déformation due à leur recouvrement. Nous supposons de plus que les (anti-)instantons ont le même rayon moyen  $\rho$ . La contribution au propagateur du gluon d'un lot de  $n_I$  instantons et  $n_A$  anti-instantons est donc  $(n_I + n_A)$  fois la contribution de (III.68). Un "fit" du propagateur du gluon dans une configuration refroidie permet donc d'obtenir une estimation de la densité volumique instantonique  $\frac{n_I + n_A}{V}$ . La validité de cette approche est illustrée par la FIG. III.3. Près du centre de l'instanton, i.e. à grand  $k$ , nous retrouvons le comportement attendu en  $\frac{1}{k^6}$ ; loin du centre de l'instanton, i.e. à petit  $k$ , nous commençons à sentir la déformation du profil induite par les interactions entre instantons.

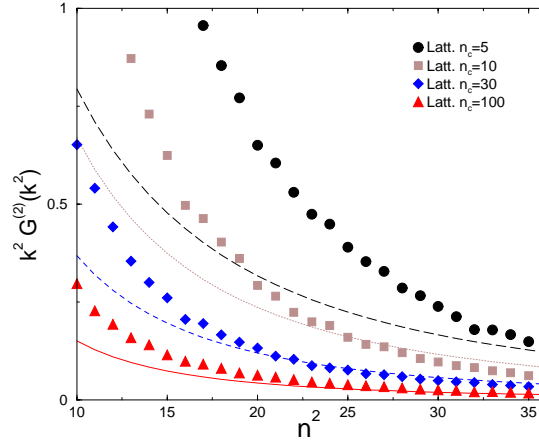


FIG. III.3 —: *Propagateur du gluon effectif à  $\beta=6,0$  sur un réseau  $24^4$ . Les points représentent le propagateur après plusieurs itérations de la procédure de refroidissement, et les lignes hachurées la prédiction analytique (III.68).  $n^2$  identifie une classe d'orbites hypercubiques.*

Les deux méthodes d'identification présentées sont en accord au moins semi-quantitatif, l'accord devenant quantitatif après un grand nombre d'itérations de la procédure de refroidissement, comme présenté TAB. III.1. Par la suite, nous utiliserons cependant la procédure de reconnaissance de forme, plus souple et plus performante. En effet, elle permet d'identifier individuellement des instantons, et de travailler hors du cadre du modèle de liquide d'instantons; elle offre plutôt une manière de tester l'applicabilité de ce modèle à nos

### III.2. SONDER LA STRUCTURE DU VIDE

configurations.

$n_c$	$n_I + n_A$ (forme)	$n_I + n_A$ (propagateur)
5	87 (2)	93 (10)
7	74 (2)	59 (1)
10	60 (1)	38 (1)
15	43 (1)	28 (1)
30	26 (1)	19 (1)
100	10 (1)	9 (1)

TAB. III.1 –: *Comparison des deux méthodes d'identification des structures instantoniques.*

#### III.2.3 $\langle A^2 \rangle$ et instantons

Supposons à présent que les instantons ont tous le même rayon moyen  $\rho$ , présenté TAB. III.2. Bien que la maille soit certainement modifiée par la procédure de refroidissement, nous utilisons la valeur de la maille  $a^{-1} = 1,996$  GeV de la configuration chaude pour donner le rayon des structures instantoniques en unités physiques.

$n_c$	$\rho$ (fm)
5	0,329 (2)
7	0,361 (2)
10	0,394 (4)
15	0,417 (5)
30	0,452 (9)
100	0,53 (1)

TAB. III.2 –: *Evaluation du rayon moyen des instantons par la procédure de reconnaissance de forme.*

Dès lors, nous pouvons évaluer la contribution instantonique au condensat  $\langle A^2 \rangle$  par :

$$\langle A^2(n_c) \rangle_{\text{inst}} = \frac{n_I + n_A}{V} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{a,\mu} A_\mu^{(I)a}(k) A_\nu^{(I)a}(-k) = 12\pi^2 \rho^2 \frac{n_I + n_A}{V} \quad (\text{III.69})$$



### CHAPITRE III. INSTANTONS ET VIDE DE QCD

Cette valeur dépend du nombre d'itérations  $n_c$  de la procédure de refroidissement. Nous utilisons l'ensemble des  $(n_c, \langle A^2(n_c) \rangle_{\text{inst}})$  pour déduire la valeur de  $\langle A^2(0) \rangle_{\text{inst}}$  de la configuration chaude par une extrapolation. Sur la FIG. III.4, nous montrons cette extrapolation pour plusieurs fonctions tests différentes.

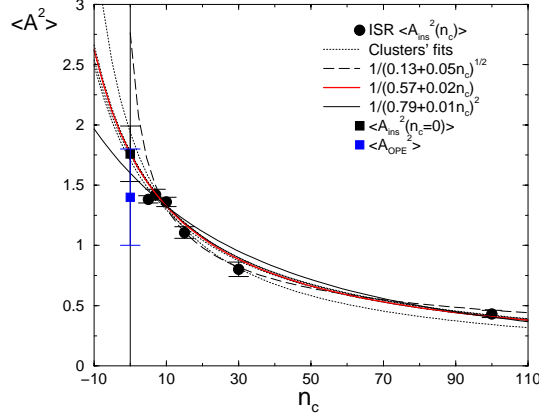


FIG. III.4 –: *Extrapolation vers la configuration chaude de  $\langle A^2(n_c) \rangle_{\text{inst}}$ .*

Nous avons essentiellement choisi des fonctions de “fit” en inverse de  $n_c$ . Ceci correspond bien à nos données, mais peut se justifier intuitivement par le petit modèle phénoménologique suivant. Une paire instanton-anti-instanton s’annule dès que les instantons sont trop près l’un de l’autre, en pratique, dès que leur distance relative est plus petite que la moyenne géométrique de leurs rayons [Mic95]. Nous prenons ici les instantons de même rayon, invariant lors de la procédure de refroidissement pour simplifier, et nous supposons qu’ils ne disparaissent que lorsqu’un instanton et un anti-instanton entrent en contact. Nous pouvons alors modéliser le taux de variation des densités de ces objets comme essentiellement proportionnel à leur probabilité de rencontre :

$$\frac{\partial n_I}{\partial n_c} = -\lambda n_I \frac{\rho^4}{V} n_A \quad (\text{III.70})$$

$$\frac{\partial n_A}{\partial n_c} = -\lambda n_I \frac{\rho^4}{V} n_A \quad (\text{III.71})$$

Par ailleurs, si nous nous plaçons dans un régime de refroidissement où la charge topologique ne varie pas, nous savons que la quantité  $q = n_I - n_A$  est une constante. Par contre, la densité totale de structure instantonique  $n = n_I + n_A$  vérifie :

$$\frac{\partial n}{\partial n_c} = -\frac{\lambda \rho^4}{2V} (n^2(n_c) - q^2) \quad (\text{III.72})$$

### III.2. SONDER LA STRUCTURE DU VIDE

Pour peu que  $q \ll n$ , nous obtenons :

$$n(n_c) = \frac{n(0)}{1 + \frac{\lambda \rho^4}{2V} n_c} \quad (\text{III.73})$$

Cette procédure d'extrapolation conduit à l'estimation de la contribution instantonique au condensat  $\langle A^2 \rangle$  de la configuration chaude :

$$\langle A^2(0) \rangle_{\text{inst}} = 1,76 \text{ (23) GeV}^2 \quad (\text{III.74})$$

où l'erreur prend notamment en compte les imprécisions inhérentes au choix de la fonction de “fit” extrapolant.

Il reste à présent à comparer cette valeur à l'estimation issue de l'étude du comportement asymptotique des fonctions de Green en termes de développement en produits d'opérateurs. Nous avons estimé  $\langle A^2(10 \text{ GeV}) \rangle_{\text{OPE}}$  renormalisé à 10 GeV. Ici, notre valeur est essentiellement une contribution infra-rouge, à laquelle nous ne savons pas rattacher naturellement d'échelle. Nous effectuons donc une évolution de  $\langle A^2 \rangle$  provenant du développement en produit d'opérateurs sous le flot du groupe de renormalisation calculé à une boucle, dans la région où nous pensons valide notre description des données sous la forme “perturbation + correction en  $\frac{1}{p^2}$ ”, i.e. essentiellement entre 2,6 GeV et 10 GeV. Nous obtenons :

$$\langle A^2(2,6 \text{ GeV}) \rangle_{\text{OPE}} = 1,4 \text{ (3) (3) GeV}^2 \quad (\text{III.75})$$

où la première erreur prend en compte l'indétermination sur  $\langle A^2(10 \text{ GeV}) \rangle_{\text{OPE}}$ , et la seconde estime l'impact de termes d'ordres supérieurs dans l'évolution sous le flot du groupe de renormalisation. L'accord numérique entre (III.74) et (III.75) est excellent, mais compte-tenu de la limitation théorique du choix de l'échelle de comparaison (2,6 GeV), nous préférons conclure plus modestement à un bon accord, au moins semi-quantitatif. Ce résultat rend néanmoins tout-à-fait vraisemblable le fait que l'origine physique de  $\langle A^2 \rangle$  soit un mécanisme instantonique. Nous allons voir que cette vision instantonique de nos configurations s'exprime de manière complètement cohérente (et prédictive) à l'étude de la constante de couplage forte à basse énergie.

#### III.2.4 Comportement infra-rouge de $\alpha_s$ et instantons

Considérons une configuration de champ de jauge engendrée par un liquide d'instantons :

$$A_\mu^{(1)a}(x) = \sum_t R_t^{a\alpha} \bar{\eta}_{\mu\nu}^\alpha (x_\nu - z_\nu^t) \frac{1}{\rho_t^2} P \left( \frac{(x - z^t)^2}{\rho_t^2} \right) \quad (\text{III.76})$$

### CHAPITRE III. INSTANTONS ET VIDE DE QCD

situés en des positions  $z^t$ , de rayons  $\rho_t$ . La matrice de rotation  $R_t^{a\alpha}$  permet de plonger l'instanton de  $SU(2)$  dans  $SU(3)$ ,  $\alpha \in \{1,2,3\}$  est un indice de  $SU(2)$  et  $a \in \{1, \dots, 8\}$  un indice de  $SU(3)$ . La somme porte aussi bien sur les instantons que les anti-instantons. Nous prenons en compte une déformation éventuelle du facteur de forme  $P$  pour tenir compte des interactions entre structures instantoniques ; pour clarifier les notations, précisons que :

$$P(u) = \frac{2}{\left(u^2(u^2 + 1)\right)} \quad (\text{III.77})$$

dans le cas de l'instanton BPST. La transformée de Fourier de ce champ s'écrit :

$$\tilde{A}_\mu^{(1)a}(p) = i \sum_t R_t^{a\alpha} \bar{\eta}_{\mu\nu}^\alpha e^{ipz^t} \rho_t^3 \frac{p_\nu}{p} I(p\rho_t) \quad (\text{III.78})$$

pour  $p \neq 0$  et  $\tilde{A}_\mu^{(1)a}(0) = 0$ . La fonction  $I$  est une transformée de Bessel :

$$I(s) = \frac{4\pi^2}{s} \int_0^{+\infty} dz z^3 J_2(sz) P(z) \quad (\text{III.79})$$

où  $J_2$  est la fonction  $J$  de Bessel de second ordre. Les matrices de plongement  $R_i^{a\alpha}$  vérifient :

$$\sum_a R_t^{a\alpha} R_t^{a\beta} = \delta^{a,b} \quad (\text{III.80})$$

Nous supposons de plus que les orientations dans l'espace de couleur et la position des instantons sont aléatoires. Ainsi, en moyennant sur l'ensemble des instantons considérés :

$$\left\langle \sum_a R_t^{a\alpha} R_s^{a\beta} e^{ip(z^t - z^s)} \right\rangle_{t \neq s} \simeq 0 \quad (\text{III.81})$$

Par suite, en considérant la configuration de jauge peuplée d'instantons de même rayon, égal à leur rayon moyen, nous obtenons une estimation du propagateur du gluon et du vertex à trois gluons effectifs<sup>12</sup> :

$$G^{(2)}(p^2) = \frac{n}{8} \langle \rho^6 I(p\rho)^2 \rangle \quad (\text{III.82})$$

$$G^{(3)}(p^2, p^2, p^2) = \frac{n}{48p} \langle \rho^9 I(p\rho)^3 \rangle \quad (\text{III.83})$$

où nous notons encore  $n$  la densité instantonique.

---

12. Nous commençons encore l'abus de langage de la SEC. III.2.2.

### III.2. SONDER LA STRUCTURE DU VIDE

La constante de couplage  $\alpha_S$  renormalisée dans le schéma MOM est donnée par l'expression :

$$\alpha_S^{\text{MOM}}(p^2) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{G^{(3)}(p^2, p^2, p^2)}{(G^{(2)}(p^2))^3} \left( p^2 G^{(2)}(p^2) \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \quad (\text{III.84})$$

Nous obtenons alors une prédiction [Bou02b] pour la constante de couplage effective :

$$\alpha_S^{\text{MOM}}(p^2) = \frac{1}{18\pi} n^{-1} p^4 \quad (\text{III.85})$$

Cette loi de comportement est tout-à-fait remarquable en ce sens qu'elle ne dépend que de la densité des instantons considérés, mais pas de leur profil  $P$ . De plus, elle permet d'accéder à la densité instantonique d'une configuration chaude sans recourir à la procédure de refroidissement, ni à une extrapolation vers une configuration chaude.

Nous utilisons toutes les données "pure jauge" que nous avons produites, et nous nous intéressons spécifiquement à la fenêtre d'énergies moindre que 0,8 GeV présentée FIG. III.5. Nous évaluons la valeur de la densité instantonique comme étant  $n = 5,27(4) \text{ fm}^{-4}$  avec un  $\chi^2/\text{d.d.l.} = 3,8$ . Cette estimation est du bon ordre de grandeur [Neg98]. Le  $\chi^2/\text{d.d.l.}$  est plutôt élevé, à cause en particulier de deux points d'erreurs très faibles. Ceci disparaîtra peut-être en améliorant la statistique de cette étude encore préliminaire.

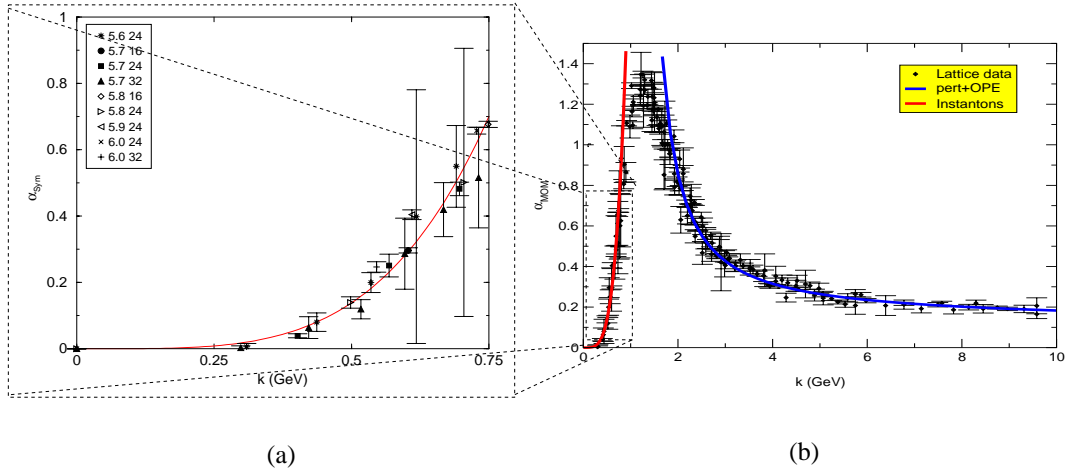


FIG. III.5 –: (b) :  $\alpha_S$  extrait du vertex symétrique. (a) : zoom sur la région de basse énergie  $\leq 0,8 \text{ GeV}$ .

L	$\beta$	n (forme)	n ( $\alpha_S^{\text{MOM}}$ )
24	5,6	0,009 (6)	0,019 (1)
24	5,8	0,048 (23)	0,090 (1)
24	6,0	0,115 (6)	0,133 (2)
32	6,0	0,145 (16)	0,197 (7)

TAB. III.3 –: Comparaison des valeurs de la densité instantonique après 200 pas de la procédure de refroidissement sur différents réseaux. Ces valeurs sont obtenues par la méthode de reconnaissance de forme et par “fit” de  $\alpha_S^{\text{MOM}}$ .

Remarquons enfin que des objets possédant une structure tensorielle autre que (III.76) vont encore contribuer à  $\alpha_S^{\text{MOM}}(p^2)$  avec une loi en puissance en  $\frac{1}{p^4}$ , mais avec un préfacteur différent. Il est donc important de savoir si  $\alpha_S^{\text{MOM}}$  détecte seulement des instantons. De ce point de vue-là, nous pouvons recourir à la procédure de refroidissement, et comparer la valeur de la densité provenant de  $\alpha_S^{\text{MOM}}$  à celle issue de la méthode de reconnaissance de forme. L'accord entre les données de la TAB. III.3 est de bonne qualité.

Sur la FIG. III.6, nous observons tout d'abord que la constante de couplage effective  $\alpha_S^{\text{MOM}}$  présente, après refroidissement, une croissance forte au sein de la région profondément infra-rouge. Paradoxalement, l'accord avec une loi en  $p^4$  est moins bon à petite impulsion dans une configuration refroidie que dans la configuration chaude ; ceci pourrait raisonnablement être un effet de déformation dû au refroidissement, bien que cette assertion exige une vérification soigneuse.

De plus, même si le comportement de  $\alpha_S^{\text{MOM}}$  ne correspond pas exactement à une puissance 4, la situation observée n'est jamais loin de 4. Ce biais pourrait s'expliquer par le fait que les instantons ont des rayons différents, ou que les positions et les orientations dans l'espace de couleur ne sont pas nécessairement aléatoires.

De manière générale, retenons donc la validité de l'usage du comportement infra-rouge de  $\alpha_S^{\text{MOM}}$  pour “mesurer” une densité d'instantons dans une configuration chaude. Nous voyons aussi que le modèle de liquide d'instantons permet de rendre compte efficacement de nos données, tant dans la région profondément infra-rouge ( $\alpha_S^{\text{MOM}}$ ) que dans la région intermédiaire ( $\langle A^2 \rangle$ ). Enfin, nous apportons une contribution au débat quant à la pertinence des instantons pour décrire les fluctuations de la densité de charge topologique : nous pensons en effet que les instantons jouent un rôle important dans la physique de basse énergie des quantités que nous avons étudiées.

### III.2. SONDER LA STRUCTURE DU VIDE

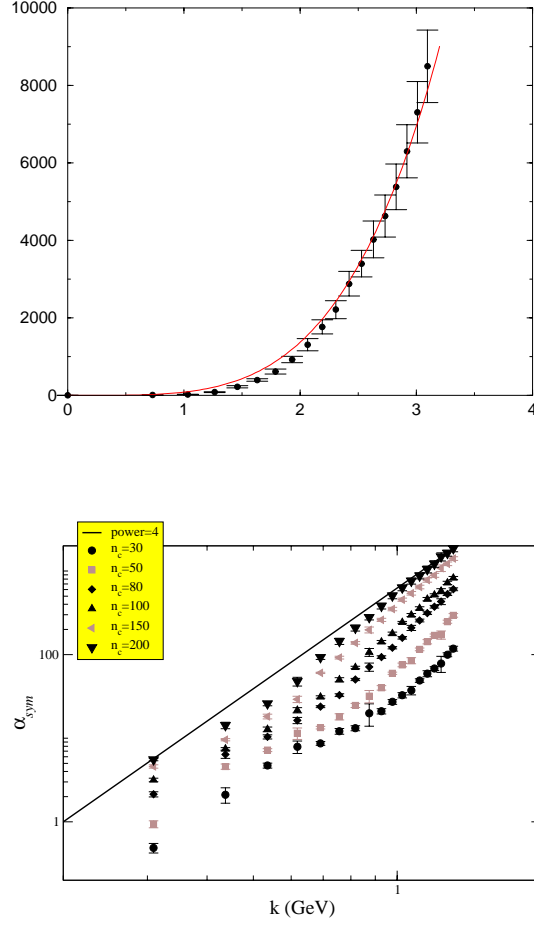


FIG. III.6 –: *En haut*:  $\alpha_S^{MOM}$  après 200 pas de la procédure de refroidissement sur un réseau  $24^4$  à  $\beta=6,0$ . L'axe des abscisses est gradué en GeV. *En bas*: graphique logarithmique de  $\alpha_S^{MOM}$  après un nombre d'itérations de la procédure de refroidissement compris entre 30 et 200.



---

## Conclusions et perspectives

---

*“Heutzutage haben die Wissenschaftler mehr Fantasie als die Verfasser von Kriminalromanen.”*

**Werner Heisenberg**

**L**E REMARQUABLE ACCROISSEMENT de la puissance de calcul numérique lors des dix dernières années a indiscutablement marqué un tournant dans l'étude des théories de jauge sur réseau. Des algorithmes dont le principe avaient été établis parfois longtemps auparavant ont commencé à devenir utilisables, et ont ainsi permis à la communauté de QCD sur réseau d'entreprendre de nouvelles études. Ce mouvement accompagne un effort constant d'invention de nouvelles méthodes toujours plus efficaces, dont les dernières permettent par exemple d'envisager à terme des études fines des propriétés chirales de la QCD. Ainsi, le vide de la QCD est maintenant un objet que nous pouvons étudier sur le réseau, et notamment sa topologie.

Nous avons développé une approche d'étude de certaines propriétés du vide de la QCD à partir de l'analyse des fonctions de Green. En jauge de Landau, le comportement asymptotique à haute énergie du propagateur du gluon et de la constante de couplage exhibent un condensat  $\langle A^2 \rangle$  aussi bien dans la théorie “pure jauge” qu'en QCD avec deux saveurs de fermions dynamiques. En gluodynamique, la valeur de ce condensat est reproduite de manière tout-à-fait satisfaisante par la prédiction d'un modèle de liquide d'instantons. Par ailleurs, ce modèle offre une image cohérente expliquant aussi le comportement infra-rouge profond de la constante de couplage, toujours en jauge de Landau, dans le schéma de renormalisation MOM. Il semble donc que la QCD perturbative fondée sur un vide constitué d'instantons permette d'expliquer l'ensemble des données “pure jauge” que nous avons produites ; ce sera assurément le cas si



## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

nous parvenons à expliquer le changement de monotonie du flot de la constante de couplage dans ce cadre conceptuel. Cependant, nous pouvons d'ores et déjà prendre position en faveur des instantons dans le débat sur leur importance dans le spectre de basse énergie de l'opérateur de Dirac.

Les simulations avec deux saveurs de fermions dynamiques sont une première en France et ont encore un caractère exploratoire. La situation devrait s'améliorer avec l'avènement de la prochaine génération de calculateurs. Des signaux moins bruyants sont nécessaires pour confronter de manière fiable nos données à un modèle de liquide d'instantons. Tant que les masses dynamiques des quarks sont suffisamment lourdes, le mode zéro de l'opérateur de Dirac ne va pas annuler le déterminant fermionique et supprimer la contribution de la configuration considérée aux valeurs moyennes dans le vide des opérateurs de la QCD. Notre interprétation instantonique devrait donc pouvoir s'exporter vers la physique "unquenched", même s'il est vraisemblable qu'un changement qualitatif de la physique se produise à la limite de masse dynamique nulle.

Il est aujourd'hui difficile d'aller analytiquement au-delà de la théorie de perturbations. Nous avons soigneusement testé la limite d'applicabilité de celle-ci, et les résultats sont assez surprenants. Tout d'abord, certains schémas de renormalisation présentent des effets non-perturbatifs importants jusqu'à des énergies où la croyance commune considère la physique comme strictement perturbative; ces effets traduisent des propriétés structurelles du vide de la QCD. Ensuite, la prise en compte d'effets non-perturbatifs n'a de sens que si la série perturbative est développée jusqu'à un ordre assez élevé, de l'ordre de trois boucles au moins. Par ailleurs, c'est vraisemblablement peu après cet ordre que vont apparaître les effets d'asymptoticité de la série.

Dans le prolongement de ces considérations, il apparaît que la QCD sur réseau ne se cantonne pas à l'étude des propriétés de basse énergie de la théorie, mais constitue un véritable pont entre l'infra-rouge et l'ultra-violet. Nous avons ainsi relié le comportement de  $\alpha_s(M_Z)$  à celui de  $m_\rho$ , qui a servi à fixer la maille de calibration des réseaux, en utilisant exclusivement les premiers principes de la QCD. C'est donc aussi un moyen de produire toute sorte de données d'intérêt phénoménologique.

De nombreuses questions restent ouvertes. La définition du condensat  $\langle A^2 \rangle$  est toujours ambiguë, et ne permet pas une interprétation invariante de jauge satisfaisante. L'extension aux jauges de type Curci-Ferrari peut apporter un meilleur éclairage à ce problème pour différencier ce qui est propre à la jauge de Landau de ce qui est du ressort de la symétrie BRST. Ce formalisme est approprié aux mécanismes de création d'une masse dynamique du gluon et offre une perspective intéressante à nos travaux, car il est probable que les instantons engendrent une masse dynamique effective des gluons. Ce cadre nous permettrait alors de nous interroger, de manière plus générale, sur les

liens entre instantons et confinement, et symétrie chirale et confinement. Ces derniers existent manifestement, bien que certainement très complexes ; les simulations de QCD sur réseau à température finie indiquent en effet que la température de restauration de la symétrie chirale est voisine de celle du déconfinement.

La valeur de  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=2}$  que nous avons extraite est en accord avec les autres estimations de la communauté, obtenues avec d'autres méthodes, mais est surprenamment basse face à  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=4} \simeq 280$  MeV et  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{n_f=5} \simeq 200$  MeV extraites de multiples expériences. S'agit-il d'une limitation intrinsèque des réseaux, d'un effet des lourdes masses des quarks, ou d'un phénomène physique subtil ?

De manière générale, les simulations numériques s'accordent sur l'absence de pôle de Landau. Néanmoins, les comportements dans l'infra-rouge profond sont assez différents selon les méthodes, notamment en comparaison des résultats obtenus par les groupes utilisant les équations de Schwinger-Dyson. Il serait souhaitable d'expliquer ces différences, et de comprendre à quel mécanisme physique est relié l'existence et la position du maximum de l'évolution de la constante de couplage sous le flot du groupe de renormalisation dans les schémas MOM et  $\widetilde{\text{MOM}}$ .



# Annexe A

---

## Formulaire perturbatif

---

Tous les résultats de ce formulaire sont énoncés en jauge de Landau.

### A.1 Fonction $\beta$

Notre convention pour la fonction  $\beta$  est :

$$\frac{\partial \alpha_s(\mu^2)}{\partial \log \mu} = - \left( \frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_s^2 + \frac{\beta_1}{4\pi^2} \alpha_s^3 + \frac{\beta_3}{64\pi^3} \alpha_s^4 + \frac{\beta_3}{128\pi^4} \alpha_s^5 \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^6) \quad (\text{A.1})$$

Notant  $t = \log \frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}$ , le flot de  $\alpha_s$  sous le groupe de renormalisation, évalué en perturbation jusqu'à l'ordre 4, s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu^2) = & \frac{4\pi}{\beta_0 t} - \frac{8\pi\beta_1}{\beta_0} \frac{\log t}{(\beta_0 t)^2} \\ & + \frac{1}{(\beta_0 t)^3} \left( \frac{2\pi\beta_2}{\beta_0} + \frac{16\pi\beta_1^2}{\beta_0^2} (\log^2 t - \log t - 1) \right) \\ & + \frac{1}{(\beta_0 t)^4} \left( \frac{2\pi\beta_3}{\beta_0} + \frac{16\pi\beta_1^3}{\beta_0^3} [-2\log^3 t + 5\log^2 t \right. \\ & \quad \left. + (4 - \frac{3\beta_2\beta_0}{4\beta_1^2}) \log t - 1] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les valeurs de  $\beta_0$  et  $\beta_1$  ne dépendent pas du schéma de renormalisation.

#### A.1.1 Schéma $\overline{\text{MS}}$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (\text{A.3})$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f \quad (\text{A.4})$$

$$\beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \left( \frac{149753}{6} + 3564\zeta(3) \right) - \left( \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta(3) \right) n_f \\ & + \left( \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta(3) \right) n_f^2 + \frac{1093}{729}n_f^3 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

### A.1.2 Schéma MOM

$$\begin{aligned} \beta_2 = & \left( \frac{186747}{32} - \frac{1683}{2}\zeta(3) \right) + \left( -\frac{35473}{48} + \frac{65}{3}\zeta(3) \right) n_f \\ & + \left( -\frac{829}{27} + \frac{16}{9}\zeta(3) \right) n_f^2 + \frac{16}{9}n_f^3 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \left( \frac{20783939}{128} - \frac{1300563}{32}\zeta(3) - \frac{900075}{32}\zeta(5) \right) \\ & + \left( -\frac{2410799}{64} + \frac{1323259}{144}\zeta(3) + \frac{908995}{144}\zeta(5) \right) n_f \\ & + \left( \frac{1464379}{648} - \frac{12508}{27}\zeta(3) - \frac{7540}{27}\zeta(5) \right) n_f^2 \\ & + \left( -\frac{3164}{27} + \frac{64}{9}\zeta(3) \right) + \frac{320}{81}n_f^4 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

### A.1.3 Schéma MOM

$$\beta_2 = 128(24 + 0,04n_f - 1,05n_f^2 + 0,0415330n_f^3) \quad (\text{A.9})$$

## A.2 Propagateur du gluon

Nous définissons la constante de renormalisation du champ de jauge  $Z_3$  par :

$$A_\nu = Z_3^{-\frac{1}{2}} A_\nu^{(\text{nu})} \quad (\text{A.10})$$

et nous notons la dimension anormale  $\gamma_3$  selon :

$$2 \frac{\partial \log A_\nu(\mu^2)}{\partial \log \mu^2} = - \frac{\partial \log Z_3(\mu^2)}{\partial \log \mu^2} = -\gamma_3(\alpha_s) = \sum_{i \geq 0} \gamma_3^{(i)} \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{i+1} \quad (\text{A.11})$$

## A.2. PROPAGATEUR DU GLUON

L'évolution de la constante de renormalisation sous le flot du groupe de renormalisation s'écrit :

$$\begin{aligned}
Z_3(\mu^2) = & \alpha_s(\mu^2)^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}} \left[ 1 + \alpha_s(\mu^2) \frac{-2\beta_1\gamma_0 + \beta_0\gamma_1}{4\pi\beta_0^2} \right. \\
& + \frac{1}{2}\alpha_s(\mu^2) \left( \frac{(-2\beta_1\gamma_0 + \beta_0\gamma_1)^2}{16\beta_0^4\pi^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{8\beta_1^2\gamma_0 - \beta_0\beta_2\gamma_0 - 4\beta_0\beta_1\gamma_1 + 2\beta_0^2\gamma_2}{32\beta_0^3\pi^2} \right) \right] \quad (A.12)
\end{aligned}$$

### A.2.1 Propagateur en MOM développé en $\alpha_s^{\widetilde{\text{MOM}}}$

$n_f = 0$

$$\gamma_0 = \frac{13}{2} \quad (A.13)$$

$$\gamma_1 = \frac{29}{8} \quad (A.14)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{128}(178399 - 46152\zeta(3)) \quad (A.15)$$

$n_f = 2$

$$\gamma_0 = \frac{31}{6} \quad (A.16)$$

$$\gamma_1 = \frac{533}{72} \quad (A.17)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{1152}(964527 - 358664\zeta(3)) \quad (A.18)$$

### A.2.2 Propagateur en MOM développé en $\alpha_s^{\text{MOM}}$

$n_f = 0$

$$\gamma_1 \simeq -16,9095 \quad (A.19)$$

$$\gamma_2 = 1332,75 \quad (A.20)$$

$$n_f = 2$$

$$\gamma_1 \simeq 1,12821 \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma_2 \simeq 590,047 \quad (\text{A.22})$$

### A.3 Dimension anormale de $A^2$

La constante de renormalisation multiplicative de  $A^2$  est définie par :

$$\langle A^2(\mu^2) \rangle = Z_{A^2}^{-1} \langle A^2 \rangle \quad (\text{A.23})$$

et la dimension anormale de  $\langle A^2 \rangle$  dans  $SU(N)$  par :

$$\gamma_{A^2}(\alpha_S(\mu^2)) = \frac{\partial \log Z_{A^2}(\mu)}{\partial \log \mu^2} = -\frac{35N}{12} \frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \quad (\text{A.24})$$

### A.4 Conversion des valeurs de $\Lambda_{\text{QCD}}$

Prenons  $\Lambda_{\text{QCD}}$  dans un schéma de renormalisation donné quelconque ; nous convertissons sa valeur dans le schéma  $\overline{\text{MS}}$  par :

$$\Lambda^{\overline{\text{MS}}} = \Lambda_{\text{QCD}} \exp \left( -\frac{a}{2\beta_0} \right) \quad (\text{A.25})$$

où  $a$  est défini dans la formule de conversion de  $\alpha_S^{\overline{\text{MS}}}$  en  $\alpha_S$  :

$$\alpha_S = \alpha_S^{\overline{\text{MS}}} + \frac{a}{4\pi} (\alpha_S^{\overline{\text{MS}}})^2 + \mathcal{O}((\alpha_S^{\overline{\text{MS}}})^3) \quad (\text{A.26})$$

Nous notons  $q_\Lambda$  le quotient :

$$q_\Lambda = \frac{\Lambda^{\overline{\text{MS}}}}{\Lambda_{\text{QCD}}} \quad (\text{A.27})$$

#### A.4.1 $\widetilde{\text{MOM}}$ vers $\overline{\text{MS}}$

$$q_\Lambda = 0,346246 \quad \text{à} \quad n_f = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$q_\Lambda = 0,385189 \quad \text{à} \quad n_f = 2 \quad (\text{A.29})$$

#### A.4. *CONVERSION DES VALEURS DE $\Lambda_{QCD}$*

##### A.4.2 MOM vers $\overline{\text{MS}}$

$$q_\Lambda = 0,299931 \quad \text{à} \quad n_f = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$q_\Lambda = 0,361737 \quad \text{à} \quad n_f = 2 \quad (\text{A.31})$$





# Annexe B

---

## Publications

---

- 1 -

Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et C. Roiesnel.

*Preliminary calculation of  $\alpha_s$  from Green functions with dynamical quarks.*  
JHEP 0201:046, 2002, hep-ph/0107278v3.

- 2 -

Ph. Boucaud, A. Donini, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et F. de Soto.

*Instantons and the  $\langle A^2 \rangle$  condensate.*  
Phys. Rev. D66:034504, 2002, hep-ph/0203119v2.

- 3 -

Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et F. de Soto.

*Transparent expression of the  $A^2$ -condensate's renormalisation.*  
Phys. Rev. D67 (2003) 074027, hep-ph/0208008v3.



# Preliminary calculation of $\alpha_s$ from Green functions with dynamical quarks

**Philippe Boucaud**

*Dip. di Fisica, Univ. di Roma “La Sapienza” and INFN, Sezione di Roma  
Piazzale Aldo Moro 2, I-00185 Rome, Italy  
E-mail: phi@qcd.th.u-psud.fr*

**Jean Pierre Leroy, Jacques Micheli and Olivier Pène**

*Laboratoire de Physique Théorique\* Université de Paris XI  
Bâtiment 211, 91405 Orsay Cedex, France  
E-mail: leroy@th.u-psud.fr, micheli@th.u-psud.fr, pene@qcd.th.u-psud.fr*

**Hervé Moutarde and Claude Roiesnel**

*Centre de Physique Théorique<sup>†</sup> de l'Ecole Polytechnique  
91128 Palaiseau cedex, France  
E-mail: herve.moutarde@cpht.polytechnique.fr,  
Roiesnel@cpht.polytechnique.fr*

**Jose Rodríguez-Quintero**

*Dpto. de Física Aplicada E.P.S. La Rábida, Universidad de Huelva  
21819 Palos de la fra., Spain  
E-mail: jqinter@nucle.us.es*

**ABSTRACT:** We present preliminary results on the computation of the QCD running coupling constant in the  $\overline{MS}$  scheme and Landau gauge with two flavours of dynamical Wilson quarks. Gluon momenta range up to about 7 GeV ( $\beta = 5.6, 5.8$  and 6.0) with a constant dynamical-quark mass. This range already allows to exhibit some evidence for a sizable  $1/\mu^2$  correction to the asymptotic behaviour, as in the quenched approximation, although a fit without power corrections is still possible with a reasonable  $\chi^2$ . Following the conclusions of our quenched study, we take into account  $1/\mu^2$  correction to the asymptotic behaviour. We find  $\Lambda_{\overline{MS}}^{N_f=2} = 264(27)\text{MeV} \times [a^{-1}(5.6, 0.1560)/2.19\text{GeV}]$ , which leads to  $\alpha_s(M_Z) = 0.113(3)(4)$ . The latter result has to be taken as a preliminary indication rather than a real prediction in view of the systematic errors still to be controlled. Still, being two sigmas below the experimental result makes it very encouraging.

**KEYWORDS:** Nonperturbative Effects, Quark Masses and SM Parameters, QCD, Lattice QCD.

---

## Contents

<b>1. Our strategy</b>	<b>2</b>
<b>2. Some useful perturbative formulae</b>	<b>3</b>
<b>3. The First iteration</b>	<b>5</b>
3.1 Lattice spacings	5
3.2 Sea-quark masses	6
3.3 Pseudocritical $\kappa$ : $\kappa_{pc}$	7
3.4 Some tests of finite volume effects	7
<b>4. Second iteration: fitting <math>\Lambda_{\text{QCD}}</math> and power corrections</b>	<b>8</b>
4.1 Fitting $\Lambda_{\text{QCD}}$ and $O(1/\mu^2)$ coefficient	8
4.2 Estimating $\alpha_s(M_Z)$	12
<b>5. Discussion and conclusion</b>	<b>13</b>

---

The non-perturbative calculation of the running coupling constant of QCD is certainly a very important problem. In pure Yang-Mills it has been performed with several different methods, the most systematic ones using the Schrödinger functional [1], and the gluon Green functions [2]–[5]. It is noticeable that the latter two methods, although very different, end up with perfectly compatible values for  $\Lambda_{\text{QCD}}$ .

Of course the real challenge is to compute  $\alpha_s$  with dynamical fermions. This task has been undertaken using NRQCD several years ago [7, 8, 9] and, once extrapolated to  $M_Z$  leads to rather satisfactory values for  $\alpha_s(M_Z)$ . Recently, the QCDSF-UKQCD collaboration [10] and the ALPHA one [11] have reported progress in determining  $\alpha_s$  with two flavours using relativistic lattice QCD and nonperturbatively improved Wilson fermions.

In this letter we will report our work consisting in applying the Green function method estimate [2]–[5] with non-improved Wilson dynamical quarks. The principle of the method is quite simple since it consists in following the steps which are standard in perturbative QCD in the momentum subtraction scheme. This gives immediately a nonperturbative estimate of the coupling constant at different scales. Its running can be confronted to the perturbative QCD expectation. We use the  $\widetilde{MOM}$  renormalization scheme which corresponds to using an asymmetric subtraction point :  $p_1^2 = p_3^2 \equiv \mu^2, p_2 = 0$ . This scheme proved to give rather good signals and, in spite of the zero momentum, no pathology has been seen.

---

\*Unité Mixte de Recherche du CNRS - UMR 8627

†Unité Mixte de Recherche C7644 du CNRS

From our study of the pure Yang-Mills case [3, 4, 5] we have learnt two main lessons: one is that a study of the asymptotic behaviour of  $\alpha_s$  needs a large energy window, since the value of  $\Lambda_{\text{QCD}}$  we are looking for depends on the weak logarithmic dependence of  $\alpha_s$  on the energy scale  $\mu$ , the second is that the  $1/\mu^2$  correction can be sizable up to a large energy.

We aim at computing  $\alpha_s$ ,  $\Lambda_{\text{QCD}}$  and the power correction term with two flavours of dynamical quarks. This requires, as we shall see in more details, an exploration of the two-dimensional  $(g_0, m_{\text{sea}})$  bare parameter space. To this goal we have run lattice simulations on several  $16^4$  lattices. Notwithstanding the modest volumes of these lattices, we realised that some interesting physics can already be extracted. Furthermore, the exploration of the bare parameter space provides us with new data which might be of interest for unquenched studies by the lattice community. This legitimates in our opinion a progress report which is the aim of this paper.

## 1. Our strategy

We have computed in the Landau gauge the two-gluon and three-gluon Green functions leading to a nonperturbative calculation of  $\alpha_s^{\text{Latt}}(\mu)$  in the well defined MOM schemes [2, 3]. At energies  $\mu$  above 2.6 GeV we will fit this function by

$$\alpha_s^{\text{Latt}}(\mu^2) = \alpha_{s,\text{pert}}(\mu^2) \left( 1 + \frac{c}{\mu^2} \right), \quad (1.1)$$

where  $\alpha_{s,\text{pert}}(\mu^2)$  is the perturbative running coupling constant computed to four loops from some fitted  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , and  $\alpha_{s,\text{pert}} c/\mu^2$  is a power correction which has proven, in the  $N_f = 0$  case, not to be negligible up to 10 GeV, and was eventually traced back to an OPE condensate  $\langle A_\mu A^\mu \rangle$ . The reason for choosing as in eq. (1.1) a non perturbative correction  $\propto \alpha_{s,\text{pert}}(\mu^2)/\mu^2$  instead of simply  $\propto 1/\mu^2$  is twofolds:

- (i) Theoretically, an OPE study [5] including a computation of the anomalous dimension of the coefficient of  $\langle A^2 \rangle$  leads to an expected energy dependence close to  $\alpha_{s,\text{pert}}(\mu^2)/\mu^2$ ;
- (ii) Practically in the quenched as well as unquenched case the fit with  $\alpha_{s,\text{pert}}(\mu^2)/\mu^2$  is much more stable for changes of the energy window than the fit with  $1/\mu^2$ . The former stability will be illustrated in table 2.

Interestingly,  $\alpha_s^{\text{Latt}}$  is at the same time both the goal of our study and a very useful tool: from the lattice simulations one extracts the continuum  $\alpha_s$  up to small lattice artifacts; lattice spacing ratios are then fitted to preserve the continuity of  $\alpha_s(\mu)$  for the whole set of data.

This program is performed on hypercubic lattices in order to simplify the necessary tensorial analysis of the Green functions.<sup>1</sup> In the  $N_f = 0$  case we combined  $\beta = 6.0, 6.2, 6.4, 6.8$

---

<sup>1</sup>This does not allow to compute the  $\rho$  meson mass, which is better performed on lattices longer in time direction than in space. Some consequences will be discussed later.

quenched lattice simulations, i.e. a lattice spacing ranging from  $\sim 0.03$  fm to 0.1 fm, in [3, 5], allowing to reach momenta up to 10 GeV.

With dynamical fermions the physics depends on two parameters,  $\beta$  which represents the bare coupling constant and  $\kappa_{\text{sea}}$  representing the bare dynamical-quark mass. A wide energy window is reached by combining simulations with different lattice spacings and the same *renormalised dynamical-quark mass expressed in physical units*. The problem is of course that we do not know a priori for a given  $\beta$  which  $\kappa_{\text{sea}}$  corresponds to one given renormalised dynamical-quark mass in physical units. This needs as mentioned above some exploration of the  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$  parameter space to find one or several lines of equal dynamical masses. In view of the computational cost of such an exploration we have chosen to perform it on a small volume,  $16^4$ .

We now would like to sketch our strategy to compute the lattice spacings and the renormalised dynamical-quark masses in this exploratory stage on a  $16^4$  volume. We proceed as follows. We start from a calibrating set of parameters  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$  for which some published results yield the inverse lattice spacing  $a^{-1}$  computed from some hadronic quantity, for example the  $\rho$  meson mass. We then estimate  $a^{-1}$  for other values of  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$  by matching<sup>2</sup> the value of  $\alpha_s(\mu)$ . This uses as an assumption that we may neglect the dependence of  $\alpha_s$  on the dynamical-quark mass, at least in the mass range under consideration. This assumption is not more arbitrary than any other calibration based on, for example, the physical  $\rho$  meson mass, which neglects the unknown dependence of the  $\rho$  meson mass on the dynamical-quark mass.

Once we have estimated the lattice spacings for all our lattices with different sets  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$ , we estimate  $m_{\text{sea}}$  from the ratio  $\partial_\mu A^\mu / P_5$  where  $A^\mu$  is the axial current and  $P_5$  the pseudoscalar density, computed for a valence quark<sup>3</sup> with the same bare mass as the dynamical quark ( $\kappa_{\text{val}} = \kappa_{\text{sea}}$ ).

At the end of this procedure we can fix with a reasonable accuracy a set of couples  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$  which includes our calibrating lattice and for which the dynamical-quark mass remains constant in physical units when  $\beta$  is varied. This knowledge allows for a preliminary analysis of  $\alpha_s$  with two flavours, of the resulting  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2}$  and power correction term, and finally of  $\alpha_s(M_Z)$ . This will be presented in this letter.

Still we do not forget that finite volume effects may be large in such a small volume, that our dynamical-quark masses are large, etc. We will therefore briefly discuss sources of systematic uncertainties at the end of this letter. We are however now in a position to launch the calculations on a larger volume  $24^4$  and/or with lighter masses and correct for the biases of our present results.

## 2. Some useful perturbative formulae

We now proceed to establish the conventions and to introduce the formulae that we will

<sup>2</sup>Our matching procedure was proved to be succesful when applied to quenched data, where lattice spacings are well known [6].

<sup>3</sup>We call valence quarks the quarks which contribute to the current densities and propagate in the gauge field background. The latter depends on the sea quark mass. The theory is unitary only if valence and sea quarks have the same mass. However we will also make use of  $\kappa_{\text{val}} \neq \kappa_{\text{sea}}$  as an intermediate step.

use in the following.  $\alpha_{\text{s,pert}}(\mu^2)$  in eq. (1.1) stands for the perturbative running coupling constant expanded up to the fourth loop and verifying (in this section we write  $\alpha$  instead of  $\alpha_{\text{s,pert}}(\mu^2)$  to simplify the notations)

$$\frac{d}{d \ln \mu} \alpha = - \left( \frac{\beta_0}{2\pi} \alpha^2 + \frac{\beta_1}{4\pi^2} \alpha^3 + \frac{\beta_2}{64\pi^3} \alpha^4 + \frac{\beta_3}{128\pi^4} \alpha^5 \right). \quad (2.1)$$

In all schemes

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f \quad \beta_1 = 51 - \frac{19}{3} N_f, \quad (2.2)$$

while  $\beta_2, \beta_3$  depend on the particular scheme. The values we need for the  $\widetilde{\text{MOM}}$  scheme can be found in ref. [12]. The exact integration of eq. (2.1) to the third loop, with the standard boundary condition defining the  $\Lambda$  parameter [13], leads to [3]

$$\begin{aligned} \Lambda^{3\text{loops}} &= \Lambda^{(c)}(\alpha) \left( 1 + \frac{\beta_1 \alpha}{2\pi \beta_0} + \frac{\beta_2 \alpha^2}{32\pi^2 \beta_0} \right)^{\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\beta_0 \beta_2 - 4\beta_1^2}{2\beta_0^2 \sqrt{\Delta}} \left[ \arctan \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta_1 + \beta_2 \alpha / 4\pi} \right) - \arctan \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta_1} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $\Lambda^{(c)}$  denotes the conventional two loops formula:

$$\Lambda^{(c)} \equiv \mu \exp \left( \frac{-2\pi}{\beta_0 \alpha} \right) \times \left( \frac{\beta_0 \alpha}{4\pi} \right)^{-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}}; \quad (2.4)$$

and  $\Delta \equiv 2\beta_0 \beta_2 - 4\beta_1^2 > 0$  in the  $\widetilde{\text{MOM}}$  scheme which we use. If one only retains the first correction coming from the perturbative fourth loop, it can then be written

$$\Lambda^{4\text{loops}} = \Lambda^{3\text{loops}} \exp \left( -\frac{\beta_3}{64\pi^2 \beta_0^2} \alpha^2 \right). \quad (2.5)$$

In the previous formula, of course, the use of  $\Lambda$ ,  $\alpha$  and  $\beta$ 's stands for the  $\Lambda$  parameter, the running coupling constant and beta function coefficients in the particular  $\widetilde{\text{MOM}}$  renormalisation scheme. From now on we will systematically convert  $\Lambda$  into  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$  using [3]

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = \Lambda \exp \left[ -\frac{1}{22} \left( \frac{70}{3} - \frac{22}{9} N_f \right) \right]. \quad (2.6)$$

No analytical expression can exactly inverse neither three-loop eq. (2.3) nor four-loop eq. (2.5). The following formula gives nevertheless an approximated solution to the inversion of the perturbative expansion of eq. (2.5):

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{s,pert}}(\mu^2) &= \frac{4\pi}{\beta_0 t} - \frac{8\pi\beta_1}{\beta_0} \frac{\log(t)}{(\beta_0 t)^2} + \\ &+ \frac{1}{(\beta_0 t)^3} \left( \frac{2\pi\beta_2}{\beta_0} + \frac{16\pi\beta_1^2}{\beta_0^2} (\log^2(t) - \log(t) - 1) \right) + \frac{1}{(\beta_0 t)^4} \times \\ &\times \left[ \frac{2\pi\beta_3}{\beta_0} + \frac{16\pi\beta_1^3}{\beta_0^3} \left( -2\log^3(t) + 5\log^2(t) + \left( 4 - \frac{3\beta_2\beta_0}{4\beta_1^2} \right) \log(t) - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

where  $t = \log(\mu^2/\Lambda^2)$ . The exact numerical inversions of, for instance, eq. (2.5), can be easily obtained; but, of course, such an exact inversion and the approximated solution in eq. (2.7) should only differ by perturbative contributions of order higher than four loops.



$\beta$	$\kappa_{\text{sea}}$	Volume	$\kappa_{pc}$	$a^{-1}$ (GeV)	$m_{\text{sea}}$ (MeV)
5.6 [14]	0.1560	$16^3 \times 32$		2.19(8)	
5.6 [14]	0.1575	$16^3 \times 32$		2.38(7)	
5.6 [15]	0.1575	$24^3 \times 40$	0.15927(5)	2.51(6)	
5.6 [15]	0.1580	$24^3 \times 40$	0.15887(4)	2.54(6)	
5.6	0.1560	$24^4$	0.16053(3)	2.19(8)	164(7)
5.6	0.1560	$16^4$	0.16048(13)	2.19(8)	164(7)
5.6	0.1575	$16^4$	0.1593(1)	2.42(9)	79(3)
5.8	0.1500	$16^4$	0.15672(6)	2.45(13)	325(18)
5.8	0.1525	$16^4$	0.15555(12)	2.76(7)	173(4)
5.8	0.1535	$16^4$	0.15522(9)	2.91(18)	103(16)
5.8	0.1540	$16^4$	0.15499(6)	3.13(13)	64(5)
6.0	0.1480	$16^4$	0.15272(7)	3.62(10)	391(12)
6.0	0.1490	$16^4$	0.15262(7)	3.73(13)	308(12)
6.0	0.1500	$16^4$	0.15238(4)	3.78(14)	213(3)
6.0	0.1505	$16^4$	0.15240(5)	3.84(15)	169(8)
6.0	0.1510	$16^4$	0.15207(3)	3.96(16)	96(4)

**Table 1:** Data taken from literature and first iteration estimates from our runs.  $\kappa_{pc}$  is defined in subsection 3.3. The dynamical-quark masses are renormalised in the  $\overline{\text{MS}}$  scheme at 3 GeV.

### 3. The First iteration

#### 3.1 Lattice spacings

The lattice parameters which we have used for our simulations are displayed in table 1 together with our estimates of the pseudocritical  $\kappa$ 's,  $\kappa_{pc}$ , defined in subsection 3.3, of the the lattice spacings and of the sea quark masses.

We will not repeat the method used to extract  $\alpha_s$  from Green functions as it is exactly similar to what was done in the pure Yang-Mills case. The  $\overline{\text{MOM}}$  scheme uses the “asymmetric” three point Green function, i.e. with gluon squared momenta  $(0, \mu^2, \mu^2)$  where  $\mu^2 = n(2\pi/L)^2$ ,  $n$  being an integer.<sup>4</sup> Let us nevertheless recall that the “asymmetric” three-point Green function turned out to be more convenient for our purpose than the symmetric one (i.e. with gluon square momenta  $(\mu^2, \mu^2, \mu^2)$ ): the high accuracy achieved in our quenched study [2, 3, 4, 5] gave us some evidence that the “asymmetric signal” was less noisy than the symmetric one, while being as reliable (more momenta available and no observable infrared pathology due to the zero momentum).

In table 1, we give the full set of runs performed and the preliminary values obtained for  $a^{-1}$  and  $m_{\text{sea}}$ . In the first four rows, we also quote sets of values taken from literature [14, 15]. In particular, the value  $a^{-1} = 2.19(8)$  GeV for (5.6, 0.1560) is taken from [14] and we will use it to calibrate all our runs. As already mentioned, ratios of lattice spacings result from imposing the continuity of  $\alpha_s(\mu)$  from different lattices, neglecting the expected

<sup>4</sup>Any integer verifies  $n = \sum_{i=0,3} n_i^2$  for at least one set of integers  $n_i, i = 0, 3$  (Lagrange’s four-square theorem).

small dependence of  $\alpha_s$  on the dynamical mass  $m_{\text{sea}}$ . Since the error on the calibrating  $a^{-1}$  propagates trivially to  $\Lambda_{\text{QCD}}$  we will use 2.19 GeV without its error until eq. (4.2); a discussion of these errors will follow eq. (4.2). Thus the errors quoted here for  $a^{-1}$  only stand for the ratios.

### 3.2 Sea-quark masses

Once the lattice spacings are estimated, we also need to compute  $am_{\text{sea}}$ . To this aim we compute the propagators of valence quarks for several  $\kappa_{\text{val}}$  among which one with  $\kappa_{\text{val}} = \kappa_{\text{sea}}$  in order to be able to deduce the mass of the sea quark from the estimated mass of the valence quark.

This is done using the ratio

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{\sum_{\vec{x}} P_5(0) \partial_0 A_0(\vec{x}, t)}{\sum_{\vec{x}} P_5(0) P_5(\vec{x}, t)}, \quad (3.1)$$

where  $P_5$  is the pseudoscalar density, and  $A_\mu$  the axial current.

To estimate the ratio  $\rho$  in (3.1) we have used two methods. The simplest consists in looking for a plateau of the ratio, the time derivative in the numerator being computed by a symmetrised discrete difference. However this “brute-force” estimate appeared to be affected by some strong  $O(a)$  effects in several cases.

The second method, which is a variant of the one proposed in [16], fits on some time interval the  $\langle P_5 P_5 \rangle$  in the denominator by a cosh function and the  $\langle P_5 A_0 \rangle$  in the numerator by a sinh with the same “mass” term.<sup>5</sup> The time derivative of the sinh in the numerator is then proportional to the cosh in the denominator and the ratio gives an estimate of the ratio  $\rho$  in (3.1). We have used the second method because it turned out to be more stable against the change of parameters (domain of the fit) and to provide a better continuity when  $\kappa$  is changed.

The valence mass is given by

$$am_{\text{val}} = \frac{Z_A}{Z_P} \rho. \quad (3.2)$$

For  $Z_A$  and  $Z_P$  in the RI-MOM scheme, we have taken [17]  $Z_A = 0.77(1)$  and  $Z_P = 0.54(1)$  i.e.  $Z_A/(2Z_P) \simeq 0.71$  at  $\mu = 3 \text{ GeV}$  (the value of  $Z_P$  is derived from the Ward identity value of  $Z_P/Z_S$  [18]). The large Goldstone pole contribution stressed in ref. [19] is claimed<sup>6</sup> to be eliminated in this value of  $Z_P$ . A more careful study of the renormalization constant will be performed soon.

From  $am_{\text{sea}}$  and  $a^{-1}$  we extract the masses presented in table 1. These masses are computed in the  $\overline{\text{MS}}$  scheme (3 GeV); the conversion from RI-MOM to  $\overline{\text{MS}}$  is obtained by using formulae involving the four-loop anomalous dimensions of the quark mass [20].

<sup>5</sup>It is not really a mass since the very short time interval considered does not allow to isolate the ground state. It nevertheless turns out that the data for  $5 \leq t \leq 11$  can be satisfactorily fitted respectively with a cosh and a sinh.

<sup>6</sup>Indeed, in ref. [23] this method is applied and agrees with ref. [24], obviously free of Goldstone boson contribution. Although the Goldstone boson question is not commented in [23] this seems to confirm the above-mentioned claim.

### 3.3 Pseudocritical $\kappa$ : $\kappa_{pc}$

For any parameter set  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$ , having computed the valence masses for several values of  $\kappa_{\text{val}}$  we extrapolate to a vanishing valence mass. We call “pseudocritical  $\kappa$ ”,  $\kappa_{pc}(\kappa_{\text{sea}})$ , the value of  $\kappa_{\text{val}}$  for which  $m_{\text{val}} = 0$ . The values of  $am_{\text{val}}$  as a function of  $1/\kappa_{\text{val}}$  are perfectly compatible with linear fits.

The pseudocritical  $\kappa$ ’s as a function of  $1/\kappa_{\text{sea}}$  are also compatible with a linear fit except for one point at  $\beta = 6.0$ :  $\kappa_{\text{sea}} = 0.1510$ . We did not succeed to understand the reason for this unusual behaviour and have for the moment withdrawn this point from our fit for  $\beta = 6.0$ . We call “critical  $\kappa$ ” ( $\kappa_c(\beta)$ ) for one  $\beta$  the value of  $\kappa_{\text{sea}}$  at which the extrapolated  $\kappa_{pc}$  is equal to  $\kappa_{\text{sea}}$ :  $\kappa_{pc}(\kappa_c) = \kappa_c$ .

Our results for  $\kappa_c$  are the following:

$$\kappa_c(5.6) = 0.158480(32), \quad \kappa_c(5.8) = 0.154682(34), \quad \kappa_c(6.0) = 0.152012(34). \quad (3.3)$$

At  $\beta = 5.6$ , we made the extrapolation using two runs performed by us, ( $\kappa_{\text{sea}} = 0.1575$  and  $\kappa_{\text{sea}} = 0.1560$  ( $24^4$ )) and a third one at  $\kappa_{\text{sea}} = 0.1580$  taken from [15]. The value of  $\kappa_c(5.6)$  we obtained is perfectly compatible with the one ( $\kappa_c(5.6) = 0.15846(5)$ ) published by SESAM [14]. Replacing our run on  $24^4$  by the one on  $16^4$  induces no significant difference. To our knowledge, the last two values are new.

### 3.4 Some tests of finite volume effects

It is clear that a critical point in everything we report here is the risk that finite volume effect might spoil our results. In our mind the present work should be mainly a preparation for similar runs on larger volumes ( $24^4$ ) and we want to be sure that the information gathered on  $16^4$  is relevant enough to tune our parameters for a larger volume. We performed two checks with this purpose.

The first one is the comparison of the two runs at  $\beta = 5.6, \kappa_{\text{sea}} = 0.1560$  reported in table 1. It can be seen that there is no significant difference between the results for  $16^4$  and  $24^4$ .

The second one relies on the idea that there could be some kind of first order phase transition at very small volume, a deconfinement and/or chiral restoration transition. Chiral symmetry restoration has the effect of eliminating the Goldstone boson and thus of invalidating the relation  $m_P^2 \propto (m_q + m_{\bar{q}})$  where  $m_P$  is the lightest pseudoscalar meson “mass”<sup>7</sup> and  $m_q$  ( $m_{\bar{q}}$ ) the (anti)quark mass.

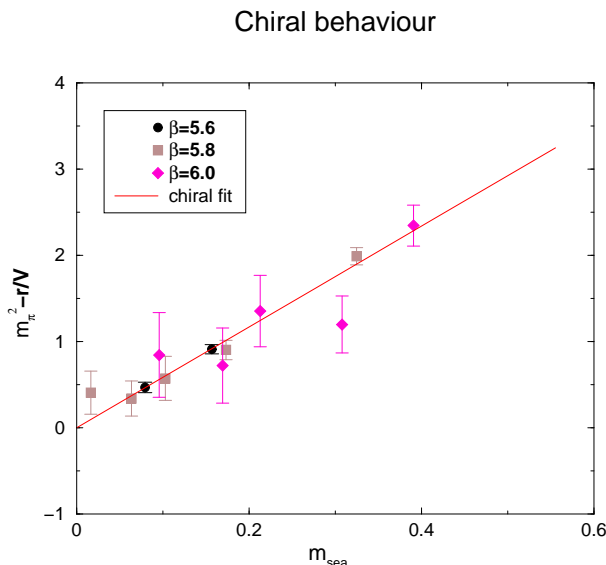
Our analysis has found empirically that all our lattice data<sup>7</sup> can be fitted to a good accuracy by the following formula:

$$m_P^2 = 2Bm_{\text{sea}} + \frac{r}{V}. \quad (3.4)$$

Here  $m_q = m_{\bar{q}}$  is the dynamical-quark mass, and  $V$  the lattice volume, both expressed in

---

<sup>7</sup>We included the run at  $\beta = 6.0, \kappa_{\text{sea}} = 0.1510$  in this analysis to test in a different way its chiral behaviour; however it did not exhibit any pathology here.



**Figure 1:** Finite size effects on chiral behaviour.

physical units. We still take the quark mass renormalised in the  $\overline{\text{MS}}$  scheme at 3 GeV. We then obtained

$$B = 2.74(5) \text{ GeV}, \quad r = 1.41(5) \text{ GeV}^2 \text{ fm}^4; \quad (3.5)$$

from a best fit with a  $\chi^2/\text{d.o.f.} = 0.57$  (see figure 1).

Eq. (3.5) shows a strong but smooth finite volume effect<sup>8</sup>, without any sign of a sudden change of regime, as would be the case with a first order phase transition.

In the infinite volume limit we should recover the pseudoscalar mass  $m_{P,\infty}$ . Indeed we checked for  $\beta = 5.6$  and  $\kappa_{\text{sea}} = 0.1575$  that  $m_{P,\infty}^2 \simeq 0.432(18) \text{ GeV}^2$ , in good agreement with SESAM [14]:  $m_P^2 \simeq 0.432(9) \text{ GeV}^2$ . Furthermore  $m_{P,\infty}^2 = 2.74(m_q + m_{\bar{q}})$ , which from the pion mass gives  $(m_u + m_d)/2 \simeq 3.6 \text{ MeV}$  and from the kaon mass  $m_s \simeq 90 \text{ MeV}$  at 3 GeV. This compares fairly well to other lattice estimates.

## 4. Second iteration: fitting $\Lambda_{\text{QCD}}$ and power corrections

### 4.1 Fitting $\Lambda_{\text{QCD}}$ and $O(1/\mu^2)$ coefficient

Once we have an approximate estimate of the lattice spacings and dynamical masses, we now proceed with a combined fit of  $\alpha_s$  on the line with approximatively constant dynamical-quark mass which goes through  $\beta = 5.6, \kappa_{\text{sea}} = 0.1560$ :  $\beta = 5.8, \kappa_{\text{sea}} = 0.1525$  and  $\beta = 6.0, \kappa_{\text{sea}} = 0.1505$ . This allows to reach momenta as large as  $\sim 7.0 \text{ GeV}$ , large enough to see the asymptotic behaviour, provided we take into account  $O(1/\mu^2)$  corrections.

According to our ansatz (1.1), we need to fit simultaneously the lattice spacing ratios, and the parameters  $\Lambda_{\text{QCD}}$  and  $c$  (coefficient of  $\alpha_{\text{s,pert}}/\mu^2$ ). To fit the lattice spacings one

<sup>8</sup>We cannot compare our finite volume correction in eq. (3.4) to existing theoretical studies of finite volume effects on ground state energies [21]: indeed, as already stressed,  $m_P$  is not really a ground state energy.

$\mu_{\min}$ (GeV)	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ (MeV)	$c$ (GeV <sup>2</sup> )	$\chi^2/\text{d.o.f.}$
2.6	264(24)	2.66(77)	0.58
3.1	256(20)	3.03(85)	0.56
3.6	267(29)	2.51(1.21)	0.54
4.1	269(29)	2.44(1.75)	0.71

**Table 2:** Four-loop fit with power corrections, eq. (1.1), on varying energy windows ( $> \mu_{\min}$ ). The stability of the fit is fairly good.

needs some analytic function to interpolate between the measured points and to adjust its parameters simultaneously with the lattice spacings to the smallest  $\chi^2$ . Two approaches are possible.

One approach is to use the asymptotic four loops behaviour plus  $\alpha_{\text{s,pert}}/\mu^2$  corrections as the analytic function. This would allow to reach both goals with one stroke but at the expense of eliminating about one half of the points at  $\beta = 5.6, \kappa_{\text{sea}} = 0.1560$  which are too low in energy to follow the asymptotic behaviour.

The other approach proceeds in two steps as follows. To fit the lattice spacings we have used polynomials. At  $\beta = 5.6, \kappa_{\text{sea}} = 0.1560$  we have used both the  $16^4$  and the  $24^4$  lattices. A universal polynomial (figure 2, *Matching of lattice spacings*) fitting all points of the four lattice settings considered does indeed exist except for a few points which happen to correspond to  $n = (L\mu)^2/(4\pi^2) \lesssim 2 - 4$  where  $L$  is the length of the lattice. We attribute this behaviour to a strong finite volume effect [3] and exclude the points below some IR cutoff. Varying this IR cut from  $n > 2$  to  $n > 4$  leads to a variation in  $\chi^2$  from  $\chi^2/\text{d.o.f.} = 1.06$  to  $\chi^2/\text{d.o.f.} = 0.79$ . For lower IR cut-offs the  $\chi^2$  increases dramatically, while for higher IR cut-offs too many points are excluded. The uncertainty induced by the choice of the cutoff is taken into account in the systematic error which affects the values quoted below. At this point, it should perhaps be emphasized again that this procedure was tested on quenched data, providing us with the generally admitted lattice spacing ratios. In this way we obtain:

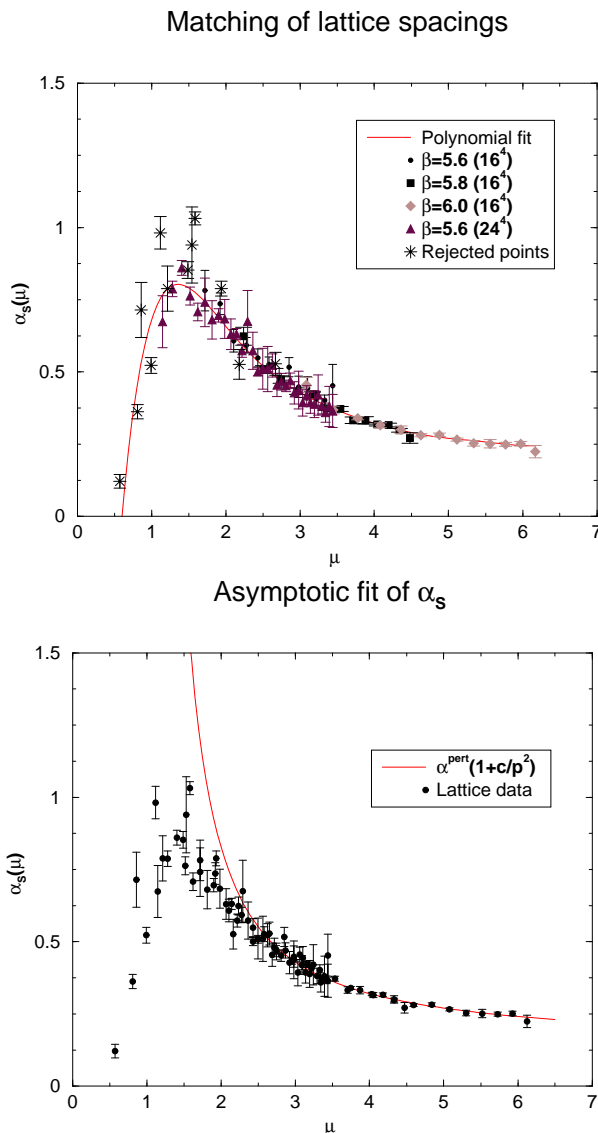
$$\begin{aligned}
 a^{-1}(5.8, 0.1525) &= 2.85 \pm .09 \pm .04 \times \frac{a^{-1}(5.6, 0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV} \\
 a^{-1}(6.0, 0.1505) &= 3.92 \pm .11 \pm .07 \times \frac{a^{-1}(5.6, 0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV}, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

where the central value corresponds to a cut at  $n \geq 3$ , the first error is statistical and the second is systematic. From now on, we are going to use these ratios, correcting the first iteration estimates shown in table 1.

Once the lattice spacings have been estimated we perform a combined fit of  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2}$  and the coefficient  $c$  as defined in eq. (1.1) with  $\alpha_{\text{s,pert}}^{N_f=2}$  given by the r.h.s. of eq. (2.7). The result is plotted in figure 2, (*Asymptotic fit of  $\alpha_s$* ).

From the results in table 2 we conclude:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2} = 264(27) \frac{a^{-1}(5.6, 0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ MeV} \quad c = 2.7(1.2) \left[ \frac{a^{-1}(5.6, 0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV} \right]^2, \quad (4.2)$$



**Figure 2:** Fits of  $\alpha_s$  obtained with four lattices.

The same analysis using the formula in eq. (1.1) leads to

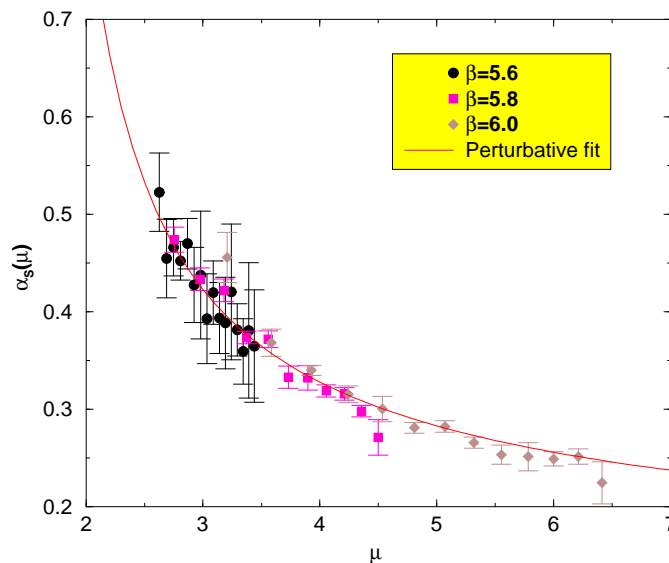
$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=0} \simeq 252(10)\text{MeV} \quad c = 1.0(1)\text{GeV}^2 \quad (4.3)$$

from our  $N_f = 0$  data<sup>9</sup> [3].

If we use the first approach mentioned above, i.e. fitting from the beginning with the formula of eq. (1.1), the result are perfectly compatible with eqs. (4.1) and (4.2). If we try the same procedure without power corrections, keeping an energy window ranging from

---

<sup>9</sup>If the fit for  $N_f = 0$  is performed according to  $\alpha_s^{\text{Latt}}(\mu^2) = \alpha_{s,\text{pert}}(\mu^2) + \frac{c}{\mu^2}$  instead of eq. (1.1) the result is  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=0} \simeq 237(10)\text{MeV}$  [4].



**Figure 3:** Purely perturbative fit of  $\alpha_s$ .

2.6 GeV, we can obtain a best fit with the following parameters (see figure 3):

$$\begin{aligned} a^{-1}(5.8, 0.1525) &= 2.86(6) \times \frac{a^{-1}(5.6, 0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV} \\ a^{-1}(6.0, 0.1505) &= 4.08(9) \times \frac{a^{-1}(5.6, 0.1560)}{2.19 \text{ GeV}} \text{ GeV} \end{aligned} \quad (4.4)$$

and

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2} = 345(6) \quad \chi^2/d.o.f. = 0.96. \quad (4.5)$$

It is not surprising that  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2}$  is larger when the fit does not include  $1/\mu^2$  corrections, since the parameters  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2}$  and  $c$  vary naturally a contrario: if one increases the other decreases. There is a possible contradiction between the acceptable  $\chi^2$  found in (4.5) and the fact that in eq. (4.2) the coefficient  $c$  is three standard deviations away from 0. This might be due to some correlations in the data; further study is needed to settle the origin of the discrepancy.

Let us nevertheless underline three facts that make us confident about the pertinence of incorporating power corrections:

1. The OPE analysis [5] still holds in the unquenched case, so we theoretically expect the presence of power corrections; we wonder about their magnitude.
2. In the pure Yang-Mills case [3, 4, 5] where high accuracy computations were achieved, the purely perturbative formula could not provide us with a good fit, but the one including power corrections managed to. This “numerical evidence” is comforted by the good agreement of our value of  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=0}$  and that of the ALPHA collaboration [5, 24].

3. Provided we do control the systematic uncertainties, the current data already show a tendency to discriminate in favour of the inclusion of non-perturbative terms. Indeed, in the case of a fit *without* power corrections, the lattice data are lying *over* the fitting curve for the lowest values of our energy window, and *under* the curve for the highest energy values. We expect this tendency to become clearer with higher statistics.

Of course, we are conscious that the present letter would benefit from a deeper discussion of systematic errors. In particular the use of non-improved dynamical quarks leads to  $O(a)$  errors. However our lattice spacings are all rather small and these errors partly cancel in the ratios of lattice spacings. The dominant error is thus an overall  $O(a)$  error on the calibrating lattice spacing. This error propagates multiplicatively to the values of  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2}$  and  $c$ . We are not in a position at the moment to estimate in a reliable way this systematic error. A rough estimate can be obtained either by analogy with the quenched case, looking at [25, figure 4] for  $a^{-1} \sim 2.2 \text{ GeV}$  or directly in the unquenched case from [14, figure 2]. A crude estimate is 20%. This would give 50 MeV on  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2}$ . The effect on  $\alpha_s(M_Z)$  will be a systematic error of  $\pm 0.004$ .

It is useful to notice that the  $O(a)$  errors are  $O(am_{\text{sea}})$  or  $O(a\Lambda_{\text{QCD}})$ . No errors  $O(a\mu)$  are expected due to symmetry reasons: the hypercubic symmetry of the lattice ( $\mu_\nu \rightarrow -\mu_\nu$  for any  $\nu$ ) implies that the momentum dependent errors are  $O(a^2\mu^2)$ , exactly as in the pure Yang-Mills case. We did not see any significant effect of the latter errors for the momenta that we have considered. In particular such errors should show up in figure 2 as a systematic deviation from the global fit for the data with largest  $a^2\mu^2$ .

## 4.2 Estimating $\alpha_s(M_Z)$

At an energy of the order of the  $Z$  meson mass the  $O(1/\mu^2)$  power correction becomes irrelevant. We will therefore only keep  $\alpha_{s,\text{pert}}$ , the perturbative part of  $\alpha_s$  from our fit and extrapolate. We proceed as indicated in [13]. We start from an energy of 1.3 GeV, the  $\overline{\text{MS}}$  charm mass which is taken as the charm threshold.<sup>10</sup> At such an energy we will extrapolate from our quenched and two-flavour results to three flavours. We then start evolving up with four flavours to the beauty threshold, 4.3 GeV, and then further up with 5 flavours to  $M_Z$ .

Applying eqs. (2.3)–(2.7) with the values of  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$  in eqs. (4.2) and (4.3) and assuming  $a^{-1}(5.6, 0.1560) = 2.19 \text{ GeV}$  we get in  $\overline{\text{MS}}$  scheme

$$\alpha_{s,\text{pert}}^{N_f=0}(1.3) = 0.259(6), \quad \alpha_{s,\text{pert}}^{N_f=2}(1.3) = 0.306(20), \quad \alpha_{s,\text{pert}}^{N_f=3}(1.3) = 0.329(26), \quad (4.6)$$

where the  $N_f = 0, 2$  results come from direct lattice estimates in [3] and in this work, while the  $N_f = 3$  has been extrapolated from the two latter.<sup>11</sup>

<sup>10</sup>We have preferred to follow the tradition here, although it is not clear to us why one should use the  $\overline{\text{MS}}$  mass and not the pole mass, and why the threshold is at  $m_c$  and not  $2m_c$  where the charm loop dispersive contribution starts for the gluon propagator.

<sup>11</sup>We simply assume that the extrapolation to an odd number of flavors is legitimate, not knowing what to do better.



The evolution up to  $M_Z$  (where non-perturbative corrections are negligible) and down to  $M_\tau$  gives

$$\alpha_s(M_Z) = 0.113(3)(4) \quad \alpha_{s,\text{pert}}(M_\tau) = 0.283(18)(37), \quad (4.7)$$

where the second error comes from the systematic error on the calibrating lattice spacing.

## 5. Discussion and conclusion

We should reemphasize that this is mainly a progress report. Most of the results reported here were performed on small volumes and with rather large quark masses. Our goal was to undertake a first exploration of the parameter space. It turned out that the results seem to make sense. The rather smooth junction of the  $\alpha_s$  points from three different lattices show that overwhelming ultraviolet or infrared lattice artifacts are absent.

The points from different lattices with identical momenta do coincide unless  $(L\mu)^2/(4\pi^2) \lesssim 2$ . Suffering presumably from strong finite volume effects these points have been excluded from the global fits. The comparison at  $\beta = 5.6, \kappa_{\text{sea}} = 0.1560$  of the  $16^4$  and the  $24^4$  volumes are encouraging and should be extended to other sets  $(\beta, \kappa_{\text{sea}})$ . The finite volume effect on masses seems to be well accounted for by eqs. (3.4), (3.5), and the good agreement of  $m_{P,\infty}$  with the estimate in [9], performed on a larger time interval, confirms this optimism.

Our result for  $\alpha_s(M_Z)$  is about 2 standard deviations below the world average experimental  $\alpha_s(M_Z) = 0.119(2)$  [13]. It is slightly larger, although compatible within errors, with the result<sup>12</sup> of [10]:  $\alpha_s(M_Z) = 0.1076(20)(18)$ . Older results using NRQCD were closer to experiment:  $\alpha_s^{(5)}(M_Z) = 0.1174(24)$  [8],  $\alpha_s^{(5)}(M_Z) = 0.118(17)$  [9]. Our result for  $\alpha_{s,\text{pert}}(M_\tau)$  is also 2  $\sigma$ 's below the experimental value of  $0.334(22)$  MeV [22]. However, the meaning of this comparison is unclear because we cannot take into account the non-perturbative contribution to  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}$  at  $M_\tau$ .

We consider the fact that our preliminary result is 2  $\sigma$ 's below experiment as very encouraging. We should stress that the error presented in eq. (4.7) corresponds to the statistical error and only to some systematic errors: mainly the choice of the fitting window and the calibration error. Other systematic effects should be systematically explored such as that of the dynamical-quark action and that of the mass of the dynamical-quark (ours are rather heavy). A calculation with a lighter dynamical-quark mass is in progress. As a final remark we would like to stress that our value for  $\alpha_s(M_Z)$  is strongly correlated to the rather large  $1/\mu^2$  corrections that we find in our fit. Starting from eq. (4.4) i.e. from a fit without power corrections we obtain  $\alpha_s(M_Z) = 0.1211(3)(40)$ . As already stated, in the fits,  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$  and  $c$  show an understandable tendency to vary a contrario. We are clearly encouraged to follow on this analysis and try to refine our result for  $\alpha_s(M_Z)$ .

## Acknowledgments

These calculations were performed partly on the QUADRICS QH1 located in the Centre de Ressources Informatiques (Paris-sud, Orsay) and purchased thanks to a funding from the

<sup>12</sup>This results from the fact that our value  $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{N_f=2} = 264(27)$  is larger than the value  $217(16)(11)$  from [10].

Ministère de l'Education Nationale and the CNRS. We are indebted to the Lattice group of the University of Rome I for allowing us to run a part of it on one of their APE100. We thank Damir Becirevic and Alain Le Yaouanc for several inspiring comments. This work was supported in part by the European Union Human Potential Program under contract HPRN-CT-2000-00145, Hadrons/Lattice QCD. Ph. B. acknowledges the Physics Department of Rome I and J. R.-Q. the LPT of Université Paris-Sud for hospitality.

## References

- [1] M. Lüscher, Talk given at the 18th International Symposium on Lepton-Photon Interactions, Hamburg, 28 July-1 August 1997;  
Lecture at l'Ecole des Houches, August 26-29 1997;  
M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz and U. Wolff, *A precise determination of the running coupling in the SU(3) Yang-Mills theory*, *Nucl. Phys. B* **413** (1994) 481 [[hep-lat/9309005](#)].
- [2] B. Alles, D. Henty, H. Panagopoulos, C. Parrinello, C. Pittori and D.G. Richards,  *$\alpha_s$  from the nonperturbatively renormalised lattice three gluon vertex*, *Nucl. Phys. B* **502** (1997) 325 [[hep-lat/9605033](#)];  
UKQCD collaboration, C. Parrinello et al., *Status of  $\alpha_s$  determinations from the nonperturbatively renormalized three gluon vertex*, *Nucl. Phys. B* **63** (Proc. Suppl.) (1998) 245 [[hep-lat/9710053](#)];  
B. Alles, D. Henty, H. Panagopoulos, C. Parrinello and C. Pittori,  *$\alpha_s$  from the nonperturbatively renormalised lattice three gluon vertex*, *Nucl. Phys. B* **502** (1997) 325 [[hep-lat/9605033](#)].
- [3] P. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène and C. Roiesnel, *Lattice calculation of  $\alpha_s$  in momentum scheme*, *J. High Energy Phys.* **10** (1998) 017 [[hep-ph/9810322](#)];  
*Three-loop beta function and non-perturbative  $\alpha(s)$  in asymmetric momentum scheme*, *J. High Energy Phys.* **12** (1998) 004 [[hep-ph/9810437](#)];  
D. Becirevic, Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero and C. Roiesnel, *Asymptotic behaviour of the gluon propagator from lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 094509 [[hep-ph/9903364](#)]; *Asymptotic scaling of the gluon propagator on the lattice*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 114508 [[hep-ph/9910204](#)].
- [4] P. Boucaud et al., *Lattice calculation of  $1/p^2$  corrections to  $\alpha_s$  and of  $\Lambda_{\text{QCD}}$  in the  $\widetilde{MOM}$  scheme*, *J. High Energy Phys.* **04** (2000) 006 [[hep-ph/0003020](#)].
- [5] P. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène and J. Rodríguez-Quintero, *Consistent ope description of gluon two point and three point Green function?*, *Phys. Lett. B* **493** (2000) 315 [[hep-ph/0008043](#)]; *Testing landau gauge ope on the lattice with a  $\langle A^2 \rangle$  condensate*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 114003 [[hep-ph/0101302](#)];  
F. De Soto and J. Rodríguez-Quintero, *Notes on the determination of the landau gauge ope for the asymmetric three gluon vertex*, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 114003 [[hep-ph/0105063](#)].
- [6] G.S. Bali and K. Schilling, *Running coupling and the  $\lambda$  parameter from SU(3) lattice simulations*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 661 [[hep-lat/9208028](#)].
- [7] A.X. El-Khadra,  *$\alpha_s$  with lattice QCD*, proceedings of the XXXIst Rencontre de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories, Les Arcs 1800, France, March 16-23, 1996 [[hep-ph/9608220](#)].

- [8] C.T.H. Davies et al., *Further precise determinations of  $\alpha_s$  from lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 2755 [[hep-lat/9703010](#)].
- [9] SESAM collaboration, A. Spitz et al.,  *$\alpha_s$  from upilon spectroscopy with dynamical Wilson fermions*, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 074502 [[hep-lat/9906009](#)].
- [10] QCDSF-UKQCD collaboration, S. Booth et al., *Determination of  $\lambda_{\overline{MS}}$  from quenched and  $n_f = 2$  dynamical QCD*, *Phys. Lett. B* **519** (2001) 229 [[hep-lat/0103023](#)].
- [11] ALPHA collaboration, A. Bode et al., *First results on the running coupling in QCD with two massless flavours*, [hep-lat/0105003](#).
- [12] K.G. Chetyrkin and A. Rétey, *Three-loop three-linear vertices and four-loop mom beta functions in massless QCD*, [hep-ph/0007088](#).
- [13] PARTICLE DATA GROUP collaboration, D.E. Groom et al., *Review of particle physics*, *Eur. Phys. J. C* **15** (2000) 1.
- [14] T. Lippert et al., *Sesam and T $\chi$ L results for Wilson action: a status report*, *Nucl. Phys. B* **60A** (Proc. Suppl.) (1998) 311 [[hep-lat/9707004](#)].
- [15] V. Gimenez, L. Giusti, G. Martinelli and F. Rapuano, *NNLO unquenched calculation of the B quark mass*, *J. High Energy Phys.* **03** (2000) 018 [[hep-lat/0002007](#)].
- [16] CP-PACS collaboration, A. Ali Khan et al., *Light hadron spectroscopy with two flavors of dynamical quarks on the lattice*, [hep-lat/0105015](#).
- [17] D. Beciveric and V. Lubicz, private communication.
- [18] L. Giusti and A. Vladikas, *RI/MOM renormalization window and goldstone pole contamination*, *Phys. Lett. B* **488** (2000) 303 [[hep-lat/0005026](#)].
- [19] J.-R. Cudell, A. Le Yaouanc and C. Pittori, *Pseudoscalar vertex, goldstone boson and quark masses on the lattice*, *Phys. Lett. B* **454** (1999) 105 [[hep-lat/9810058](#)]; *Pseudoscalar vertex and quark masses*, *Nucl. Phys. B* **83** (Proc. Suppl.) (2000) 890 [[hep-lat/9909086](#)]; *Large pion pole in  $Z_S^{MOM}/Z_P^{MOM}$  from Wilson action data*, *Phys. Lett. B* **516** (2001) 92 [[hep-lat/0101009](#)].
- [20] K.G. Chetyrkin, *Quark mass anomalous dimension to  $O(\alpha_s^4)$* , *Phys. Lett. B* **404** (1997) 161 [[hep-ph/9703278](#)];  
K.G. Chetyrkin and A. Retey, *Renormalization and running of quark mass and field in the regularization invariant and  $\overline{MS}$  schemes at three and four loops*, *Nucl. Phys. B* **583** (2000) 3 [[hep-ph/9910332](#)];  
J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin and T. van Ritbergen, *The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass*, *Phys. Lett. B* **405** (1997) 327 [[hep-ph/9703284](#)].
- [21] J. Gasser and H. Leutwyler, *Spontaneously broken symmetries: effective lagrangians at finite volume*, *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 763.
- [22] ALEPH collaboration, R. Barate et al., *Measurement of the spectral functions of axial-vector hadronic tau decays and determination of  $\alpha_s(M_\tau^2)$* , *Eur. Phys. J. C* **4** (1998) 409.
- [23] D. Becirevic, V. Lubicz and G. Martinelli, *Charm quark mass*, *Phys. Lett. B* **524** (2002) 115 [[hep-ph/0107124](#)].
- [24] ALPHA collaboration, S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer and H. Wittig, *Non-perturbative quark mass renormalization in quenched lattice QCD*, *Nucl. Phys. B* **544** (1999) 669 [[hep-lat/9810063](#)].

- [25] R.G. Edwards, U.M. Heller and T.R. Klassen, *The effectiveness of non-perturbative  $O(a)$  improvement in lattice QCD*, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 3448 [[hep-lat/9711052](#)].



# Instantons and the $\langle A^2 \rangle$ condensate

Ph. Boucaud,<sup>1</sup> J. P. Leroy,<sup>1</sup> A. Le Yaouanc,<sup>1</sup> J. Micheli,<sup>1</sup> O. Pène,<sup>1</sup> F. De Soto,<sup>2</sup> A. Donini,<sup>3</sup> H. Moutarde,<sup>4</sup>  
and J. Rodríguez-Quintero<sup>5</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Théorique, Université de Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay Cedex, France*

<sup>2</sup>*Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad de Sevilla, Apdo. 1065, 41080 Sevilla, Spain*

<sup>3</sup>*I.N.F.N., Roma I and Dip. Fisica, Università di Roma "La Sapienza," P.le A. Moro 2, 00185 Rome, Italy*

<sup>4</sup>*Centre de Physique Théorique Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France*

<sup>5</sup>*Departamento de Física Aplicada, E.P.S. La Rábida, Universidad de Huelva, 21819 Palos de la fra., Spain*

(Received 16 March 2002; published 19 August 2002)

We argue that the  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle$  condensate found in the Landau gauge on lattices, when an operator product expansion of Green's functions is performed, might be explained by instantons. We use cooling to estimate the instanton contribution and extrapolate back the result to the thermalized configuration. The resulting  $\langle A_{\text{inst}}^2 \rangle$  is similar to  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle$ .

DOI: 10.1103/PhysRevD.66.034504

PACS number(s): 12.38.Aw, 11.15.Ha, 12.38.Cy, 12.38.Gc

## I. INTRODUCTION

Lattice calculations of the gluon propagator and three-point Green's function in the Landau gauge indicate that the expected perturbative behavior at large momentum  $p$  has to be corrected by a  $O(1/p^2)$  contribution sizeable up to 10 GeV [1–5]. An understanding of this contribution as the effect of an  $A^2 \equiv A_\mu^a A_\mu^a$  condensate [in the Landau gauge  $A^2$  is the only mass dimension-two operator liable to have a vacuum expectation value (VEV)] has been gained by verifying that two independent Green's functions could be described by the perturbative contribution corrected by the effect of one common value of  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle$ , as expected from the operator product expansion (OPE). The physical origin of this condensate is an important question, possibly involving the non-trivial topology of the QCD vacuum. In particular, instantons provide an interesting insight into a wide range of low energy QCD properties ([6] and references therein). They have been put into evidence on the lattice using different cooling procedures. In this paper we claim that instantons provide for  $\langle A^2 \rangle$  a value close to what is needed for the OPE fit to Green's functions.

We propose a method to identify instantons from the cooled gauge configuration, count them and measure their radii; we also check that these results are compatible with the instanton number deduced from the two-point correlation function of an instanton. We then estimate  $\langle A_{\text{inst}}^2 \rangle$ , the contribution of the instantons to  $\langle A^2 \rangle$  in cooled configurations, extrapolate back to the thermalized configurations (zero cooling sweeps) and, finally, compare the outcome with the OPE estimate.

## II. COOLING AND INSTANTON COUNTING BY SHAPE RECOGNITION

### A. Cooling

In order to study the influence of the underlying classical properties of a given lattice configuration, the first step will be to isolate these structures from UV modes. The method we use is due to Teper [7]; it consists of replacing each link

by a unitary matrix proportional to the staple. A *cooling sweep* is performed after replacing all the links of the lattice. This procedure introduces largely discussed biases, such as UV instanton disappearance and instanton–anti-instanton pair annihilations, that increase with the number of cooling sweeps; alternative cooling methods have been proposed (see for example [8] and references therein) to cure these diseases. We will try to reduce them by identifying the instantons after a few cooling sweeps and extrapolating back to the thermalized gauge configuration.

### B. Instantons

Instantons (anti-instantons) are classical solutions [9] of the equations of motion. We work in the Landau gauge which is defined on the lattice by minimizing  $\sum_x A_\mu(x)^2$ . For an instanton solution this prescription leads to the singular Landau gauge, where the gauge field is [9]

$$A_\mu^{(I)a} = \frac{2\bar{\eta}_{\mu\nu}^a x_\nu \rho^2}{x^2(x^2 + \rho^2)}, \quad (1)$$

$\rho$  being the instanton radius. The instanton chosen has been centered at the origin with a conventional color orientation. These solutions have  $Q = \pm 1$  topological charge,

$$Q \equiv \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_a^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \pm \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (2)$$

where  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ . From Eq. (1) the topological charge density is

$$Q_\rho(x) = \pm \frac{6}{\pi^2 \rho^4} \left( \frac{\rho^2}{x^2 + \rho^2} \right)^4. \quad (3)$$

On the lattice, the topological charge density will be computed as

$$Q_{\text{latt}}(x) = \frac{1}{2^9 \pi^2} \sum_{\pm 1}^{\pm 4} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}[\Pi_{\mu\nu}(x) \Pi_{\rho\sigma}(x)], \quad (4)$$

with  $\Pi_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \mu\hat{a})U_\mu^\dagger(x + \mu\hat{a} + \nu\hat{a})U_\nu^\dagger(x + \nu\hat{a})$ , and  $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$  the antisymmetric tensor, with an extra minus sign for each negative index.

### C. Identification of instantons

A common belief is that an instanton liquid gives a fair description of important features of the QCD vacuum. Along this line we will try a description of our cooled gauge configuration as an ensemble of non-interacting instantons with random positions and color orientations. We hence also neglect the interaction-induced instanton deformations and correlations. Although the instanton ensemble for the QCD vacuum cannot be considered as a dilute gas [6–12], this crude assumption allows a qualitatively reasonable picture, especially near the instanton center.

Many enlightening works have studied the instanton properties from lattice gauge configurations,<sup>1</sup> among which are [13–16]. As for us, we start by searching regions where the topological charge density looks like that of Eq. (3). Starting from each local maximum or minimum of  $Q_{\text{latt}}(x)$  we integrate over all neighboring points with  $|Q_{\text{latt}}(x)| \geq \alpha|Q_{\text{latt}}(x_{\text{max}})|$ , for different values of  $\alpha$  ranging from 0.8 to 0.4. A local extremum is accepted to be an (anti-)instanton if the ratio  $\epsilon$  between the lattice integral and its theoretical counterpart,  $Q_\rho(x)$ ,

$$\epsilon = (1 - 3\alpha^{1/2} + 2\alpha^{3/4})^{-1} \int_{x/|Q(x)| \geq \alpha|Q(0)|} d^4x Q_{\text{latt}}(x) \quad (5)$$

shows a plateau when  $\alpha$  is varied. Indeed for a theoretical (anti-)instanton  $\epsilon = 1$  ( $\epsilon = -1$ ) for any  $\alpha \in [0, 1]$ . As a cross-check of self-duality, this instanton shape recognition (ISR) procedure is applied on the lattice to both expressions for  $Q$  introduced in Eq. (2).

### D. Instanton numbers and radii

The ISR method resolves the semiclassical structure on the lattice with only  $\sim 5$  cooling sweeps. This early recognition reduces the possible cooling-induced bias.

Whenever this method succeeds, we measure the radius of the accepted instanton in two separate ways: from the maximum value of  $Q$ , written  $Q_{\text{latt}}^{\text{max}}$ , at the center of the instanton, and from the number  $N_\alpha$  of lattice points in the volume  $\int_{x/|Q(x)| \geq \alpha|Q(0)|} d^4x$ . We find

$$\rho/a = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi^2 Q_{\text{latt}}^{\text{max}}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{-1/4} - 1}} \sqrt[4]{\frac{2N_\alpha}{\pi^2}}. \quad (6)$$

These two measures of the radius agree within 10%.

<sup>1</sup>A detailed comparison of our results to theirs will appear in a forthcoming extensive work.

## III. GLUON PROPAGATOR

### A. The instanton gauge-field correlation function

The classical gauge-field two-point correlation function verifies, for any position and color orientation,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \sum_a \bar{G}_{\mu\nu}^{aa} &\equiv \frac{1}{8V} \sum_a (A_\mu^{(I)a}(k) A_\nu^{(I)a}(-k)) \\ &= \bar{G}^{(2)}(k^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

where  $V$  is the volume in the Euclidean four-dimensional space and  $A_\mu^{(I)a}(k)$  is the Fourier transform of Eq. (1). The resulting scalar form factor is

$$\bar{G}^{(2)}(k^2) = \frac{32\pi^4}{Vk^6} \left( 1 - \frac{(k\rho)^2}{2} K_2(k\rho) \right)^2, \quad (8)$$

$K_2$  being a Bessel function [17]. Equation (8) equally applies to instantons and anti-instantons.<sup>2</sup>

In a perfect gas approximation for an ensemble of  $n_I$  ( $n_A$ ) (anti-)instantons of radius  $\rho$ , the classical gauge-field correlation function is simply given by Eq. (8) times the number of instantons and anti-instantons,  $n_I + n_A$ . This correlation function is the contribution of the background field to the gluon propagator. We expect this formula to describe the behavior of the lattice gluon propagator once the effect of quantum UV fluctuations is removed by the cooling procedure [7]. The effect of instanton interactions is known [10,11] to modify the instanton shape far from its center, in the IR region. But the large  $k^2$  behavior should be appropriately given by Eq. (8) i.e.  $\propto 1/k^6$ . This is shown in Fig. 1(a) for one generic lattice gauge field configuration.

The theoretical lines in that plot<sup>3</sup> are generated by Eq. (8) using the average radius  $\rho$  and  $n_I + n_A$  computed from the ISR method. Note that the matching improves with the number of cooling sweeps. This agrees with the expectation that decreasing the instanton density reduces the instanton deformation and that quantum fluctuations are damped by cooling. Reversely, if we know the average radius from the ISR method, we can compute  $n_I + n_A$  from the fit to the measured propagator.

### B. The hard gluon propagator

Let us now consider a hard gluon of momentum  $p_\mu$  propagating in an instanton gas background. The gluon interacts with the instanton gauge field. This can be computed with Feynman graphs and it is easy to see that when the instanton modes  $k_\mu$  verifies  $k_\mu \sim 1/\rho \ll p_\mu$ , the dominant contribution is an  $O(1/p^2)$  correction to the perturbative gluon. This correction is equal to the standard OPE Wilson

<sup>2</sup>A similar analysis is being performed parallel, in other context, by Broniowski and Dorokhov [18].

<sup>3</sup>We multiply by  $k^2$  to compute a dimensionless object and perform the matching.

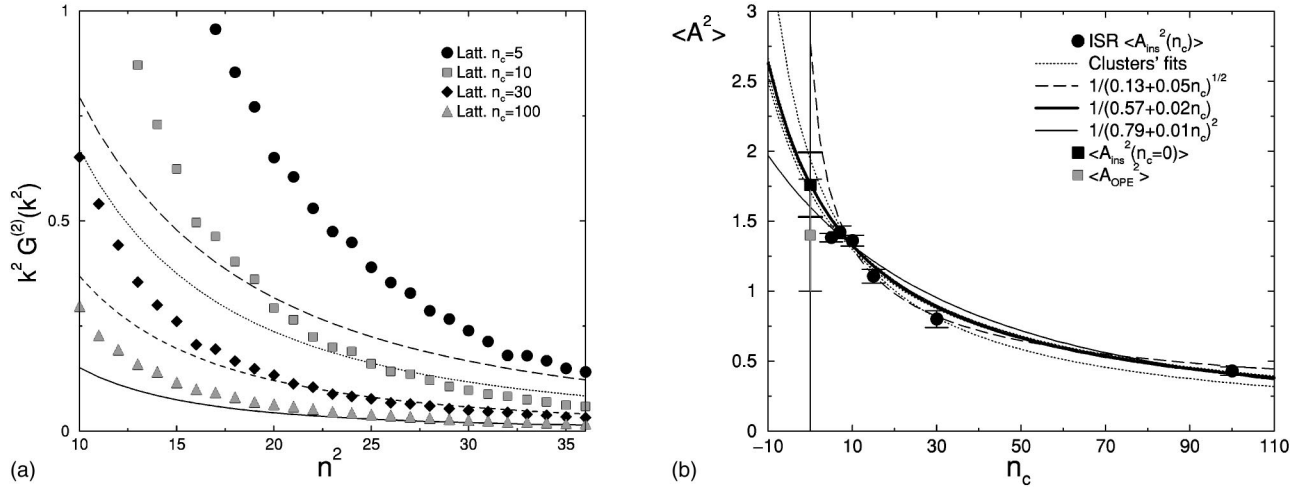


FIG. 1. In Fig. 1(a) (left) we present the lattice gluon propagators after several number of cooling sweeps (points) and the corresponding theoretical instanton gauge-field correlation functions (lines) in the perfect instanton gas approximation, Eq. (8), plotted as a function of  $n^2$  ( $n_\mu \equiv L/(2\pi)k_\mu$ ,  $L$  being the lattice length). In Fig. 1(b) (right), we show the extrapolation at zero cooling of  $\langle A^2(n_c) \rangle$  in physical units (for three different trial functions).

coefficient [2,3] times  $\langle A_{\text{inst}}^2(0) \rangle \equiv 1/V \int d^4x A_\mu^{(I)a} A_\mu^{(I)a}(x)$ . We will now proceed to estimate this instanton-induced condensate.

#### IV. $\langle A^2 \rangle$ CONDENSATE

##### A. $\langle A^2 \rangle$ in instantons

From Eq. (1) we get

$$\begin{aligned} \langle A_{\text{inst}}^2(n_c) \rangle &\equiv \frac{n_I + n_A}{V} \int d^4x \sum_{\mu,a} A_\mu^{(I)a} A_\mu^{(I)a} \\ &= 12\pi^2 \rho^2 \frac{n_I + n_A}{V}, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $\rho$  is the average instanton radius in the considered cooled configuration and  $n_c$  is the number of cooling sweeps.

We use an ensemble of 10 independent gauge configurations<sup>4</sup> at  $\beta=6.0$  on a  $24^4$  lattice. Each configuration has been cooled and after 5, 7, 10, 15, 30 and 100 cooling sweeps transformed into the Landau gauge. Using the ISR method on each gauge configuration, we obtain the results of Table I. In this table we also present the number of (anti-)instantons and the corresponding value for  $\langle A^2(n_c) \rangle$  computed by a correlation function fit (CFF) i.e. a fit of the lattice propagators to the instanton correlation function, Eq. (8). The CFF method is expected to be affected differently from the ISR method by systematic uncertainties: instanton interactions, deformations and quantum fluctuations [as we can see in Fig. 1(a), at low momentum], and we therefore consider as quite encouraging the qualitative agreement, becoming quantitative at large  $n_c$ , between ISR and CFF results. We have, for simplicity, translated our lattice results

into physical units using, for all values of  $n_c$ , the  $n_c=0$  inverse lattice spacing,  $a^{-1}(n_c=0) = 1.996$  GeV (at  $\beta=6.0$ ). This simple recipe overlooks the effect of cooling on the lattice spacing (see Ref. [15] and references therein) but this simplification becomes harmless after extrapolating back our results to  $n_c=0$ .

##### B. $\langle A_{\text{inst}}^2(n_c) \rangle$ at zero cooling

The instanton number depends on the number of cooling sweeps. This result may imply that the cooling procedure destroys not only quantum UV fluctuations but something else from the semiclassical background of gauge fields. To lessen this problem we take advantage of the early recognition of the instanton content in a gauge configuration ensured by the ISR method and perform an extrapolation [19] to  $n_c=0$  of the ISR results for  $\langle A_{\text{inst}}^2(n_c) \rangle$  in the table. We then obtain [see Fig. 1(b)]:

$$\langle A_{\text{inst}}^2(n_c=0) \rangle = 1.76(23) \text{ GeV}^2. \quad (10)$$

We have used a form  $a/(b+n_c)$  to fit and extrapolate. We have also varied a little this functional form to check the stability of the extrapolation. We take this result as indicative of the non-perturbative instanton contribution to the  $\langle A^2 \rangle$

TABLE I. Estimates of  $\langle A_{\text{inst}}^2(n_c) \rangle$ .

$n_c$	$\rho$ (fm)	$n_I + n_A$		$\langle A^2 \rangle$ (GeV <sup>2</sup> )	
	ISR	ISR	CFF	ISR	CFF
5	0.329(2)	87(2)	93(10)	1.38(3)	0.9(8)
7	0.361(2)	74(2)	59(1)	1.42(5)	1.12(2)
10	0.394(4)	60(1)	38(1)	1.36(4)	0.86(2)
15	0.417(5)	43(1)	28(1)	1.11(4)	0.72(2)
30	0.452(9)	26(1)	19(1)	0.80(6)	0.57(3)
100	0.53(1)	10(1)	9(1)	0.43(3)	0.37(3)

<sup>4</sup>Considering the present size of our systematic uncertainties we did not consider it worthwhile to further increase the statistics.



condensate. If we applied other lattice estimates of instanton gas parameters taken from the available literature to Eq. (9), the value of  $\langle A^{(I)^2} \rangle$  would range<sup>5</sup> from 1 to 2 GeV<sup>2</sup>. On the other hand, parameters from instanton liquid based phenomenology [6] yield estimates of the order of 0.5 GeV<sup>2</sup>. As the quoted error in Eq. (10) is only statistical, this last range somehow estimates a certain systematic uncertainty.

### C. Comparison with $\langle A^2 \rangle$ from OPE

Our instanton estimate of  $\langle A^2 \rangle$  is a semiclassical one, deprived of the necessary UV fluctuations, and therefore not directly comparable with [2]  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle(10 \text{ GeV}) = 2.4(5) \text{ GeV}^2$ . There is of course no exact recipe to compare both estimates, since the separation between the semiclassical nonperturbative domain and the perturbative one cannot be exact. We may appeal to the fact that at the renormalization point  $\mu$ , the radiative corrections are minimized; therefore a semiclassical estimate must best correspond to  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle$  at some reasonable  $\mu$ . In the example of  $\phi^2$  vacuum expectation in the spontaneously broken  $\phi^4$  model given in [21], one finds indeed that it equals the classical estimate for  $\mu$  around the spontaneously generated mass. In our problem, one could guess that the corresponding scale should typically be around  $1/\rho \approx 0.7 \text{ GeV}$ , or some gluonic mass, a very low scale anyway. We cannot run  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle(10 \text{ GeV})$  down to such a low scale [2],

$$A_{R,\mu}^2 = A_{R,\mu_0}^2 \left( 1 + \frac{35}{44} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \right) / \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{MOM}}}. \quad (11)$$

We therefore stop arbitrarily  $\mu \sim 2.6 \text{ GeV}$ , where the OPE corrected perturbative running of the Green's functions fails to correctly describe their behavior. This scale of 2.6 GeV turns out to be of the same order [2] as the critical mass [22] for the gluon propagator. At this scale, we obtain

$$\langle A_{\text{OPE}}^2(2.6 \text{ GeV}) \rangle = 1.4(3)(3) \text{ GeV}^2, \quad (12)$$

<sup>5</sup>We use the parameters obtained in [20] for simulations on different lattices and  $\beta$ 's with a cooling improved to let scale invariant instanton solutions exist for large enough instanton sizes. We only quote anyway the results where the packing rate,  $\pi^2/2(\rho/L)^4(n_I + n_A)$ , is as much as 1, since our method to estimate  $\langle A_{\text{inst}}^2(n_c) \rangle$  assumes limited overlap between instantons.

where the first quoted error just propagates the uncertainty from the OPE determination of  $\langle A^2 \rangle$  and the second one takes into account, in the way proposed in Ref. [4], higher orders<sup>6</sup> in  $\alpha_s$  for running.

### V. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

We are aware that our method of comparison of  $\langle A_{\text{inst}}^2(n_c=0) \rangle$  and  $\langle A_{\text{OPE}}^2 \rangle$  suffers from a lot of arbitrariness and approximations (such as the perfect gas approximation, possible errors in the instanton identification, the uncertainty in the extrapolation to zero cooling sweeps, etc.). We have taken care to cross check our estimates by comparing different methods at each step of the computation, in particular the ISR and CFF [see Fig. 1(a) and Table I]. A comparison with direct “measurements” of the  $\langle A^2 \rangle$  condensate from cooled lattice configurations could be thought of as an additional crosscheck. Qualitative agreement is found for a large enough number of cooling sweeps, but this agreement is manifestly destroyed by UV fluctuations already for  $n_c \sim 30$ . Of course, by using ISR and instanton gas approximation we sharply separate UV fluctuations from the semiclassical background. All these imprecisions seem inherent to the subject anyway.

With this in mind, we nevertheless take the fair agreement between Eqs. (10) and (12) as a convincing indication that the  $A^2$  condensate receives a significant instantonic contribution. In other words, the instanton liquid picture might yield the explanation for the  $1/p^2$  corrections to the perturbative behavior of Green functions computed with thermalized configurations on the lattice.

### ACKNOWLEDGMENTS

These calculations were performed on the Orsay APEmille purchased thanks to funding from the Ministère de l'Education Nationale and the CNRS. We are indebted to Bartolome Alles, Carlos Pena and Michele Pepe for illuminating discussions. A.D. acknowledges the M.U.R.S.T. for financial support through Decreto 1833/2001 (short term visit program) and F.S. acknowledges the Fundación Cámara for financial support. A.D. wishes to thank the LPT-Orsay for its warm hospitality. This work was supported in part by the European Union Human Potential Program under contract No. HPRN-CT-2000-00145, Hadrons/Lattice QCD.

<sup>6</sup>We re-write Eq. (11) in terms of the coupling constant renormalized in other schemes, such as  $\overline{\text{MS}}$ .

- [1] Ph. Boucaud *et al.*, J. High Energy Phys. **04**, 006 (2000).
- [2] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Lett. B **493**, 315 (2000).
- [3] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D **63**, 114003 (2001).
- [4] D. Becirevic, Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, J. Rodriguez-Quintero, and C. Roiesnel, Phys. Rev. D **60**, 094509 (1999); **61**, 114508 (2000).

- [5] F. De Soto and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D **64**, 114003 (2001).
- [6] T. Schafer and E.V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998).
- [7] M. Teper, Phys. Lett. **162B**, 357 (1985); Phys. Lett. B **171**, 86 (1986).
- [8] M. Garcia Perez, O. Philipsen, and I.O. Stamatescu, Nucl. Phys. **B551**, 293 (1999).
- [9] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976); **18**, 2199(E) (1976).

- [10] D. Diakonov and V.Y. Petrov, Nucl. Phys. **B245**, 259 (1984).
- [11] J.J. Verbaarschot, Nucl. Phys. **B362**, 33 (1991); **B386**, 236(E) (1991).
- [12] M. Hutter, hep-ph/0107098.
- [13] M.C. Chu, J.M. Grandy, S. Huang, and J.W. Negele, Phys. Rev. D **49**, 6039 (1994).
- [14] P. de Forcrand, M. Garcia Perez, and I.O. Stamatescu, Nucl. Phys. **B499**, 409 (1997).
- [15] UKQCD Collaboration, D.A. Smith, and M.J. Teper, Phys. Rev. D **58**, 014505 (1998).
- [16] C. Michael and P.S. Spencer, Phys. Rev. D **52**, 4691 (1995).
- [17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhiz, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed., edited by Alan Jeffre (Academic, New York, 1994).
- [18] W. Broniowski (private communication).
- [19] J.W. Negele, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **73**, 92 (1999).
- [20] P. de Forcrand, M. García Pérez, J. E. Hetrick, and I.-O. Stamatescu, in *Proceedings of the Theory of Elementary Particles: 31st International Symposium Ahrenschoop*, 1997, Buclew, Germany, edited by H. Dorn, D. Lust, and G. Weigt (Wiley, New York, 1998), hep-lat/9802017.
- [21] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B249**, 445 (1985).
- [22] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B191**, 301 (1981).



# Transparent expression of the $A^2$ condensate's renormalization

Ph. Boucaud,<sup>1</sup> F. De Soto,<sup>2</sup> A. Le Yaouanc,<sup>1</sup> J. P. Leroy,<sup>1</sup> J. Micheli,<sup>1</sup> H. Moutarde,<sup>3</sup> O. Pène,<sup>1</sup> and J. Rodríguez-Quintero<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Théorique, Université de Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay Cedex, France*

<sup>2</sup>*Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad de Sevilla, Apartado 1065, 41080 Sevilla, Spain*

<sup>3</sup>*Centre de Physique Théorique Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France*

<sup>4</sup>*Departamento de Física Aplicada, Facultad Ciencias Experimentales, Universidad de Huelva, 21071 Huelva, Spain*

(Received 1 October 2002; published 24 April 2003)

We give a more transparent understanding of the vacuum expectation value of the renormalized local operator  $A^2$  by relating it to the gluon propagator integrated over the momentum. The quadratically divergent perturbative contribution is subtracted and the remainder, dominantly due to the  $O(1/p^2)$  correction to the perturbative propagator at large  $p^2$  is logarithmically divergent. This provides a transparent derivation of the fact that this  $O(1/p^2)$  term is related to the vacuum expectation value of the local  $A^2$  operator and confirms a previous claim based on the operator product expansion (OPE) of the gluon propagator. At leading logarithms the agreement is quantitative, with a standard running factor, between the local  $A^2$  condensate renormalized as described above and the one renormalized in the OPE context. This result supports the claim that the BRST invariant Landau-gauge  $A^2$  condensate might play an important role in describing the QCD vacuum.

DOI: 10.1103/PhysRevD.67.074027

PACS number(s): 12.38.Aw, 11.15.Ha, 12.38.Cy, 12.38.Gc

## I. INTRODUCTION

In a series of lattice studies [1–4] the gluon propagator in QCD has been computed at large momenta, and it was shown that its behavior was compatible with the perturbative expectation provided a rather large  $1/p^2$  correction was considered. In an OPE approach this correction has been shown [2,3] to stem from an  $A^2$  gluon condensate which does not vanish since the calculations are performed in the Landau gauge. It was also claimed [4] that this condensate might be related to instantons.

The role of such a condensate in the nonperturbative properties of QCD, in particular its relation to confinement, has been studied by several groups [5,6]. Of course any physics discussion about the  $A^2$  condensate necessitates a clear definition of what we speak about, i.e., it needs a well defined renormalization procedure to define the renormalized local  $A^2$  operator, since  $A(0)^2$  is a quadratically divergent quantity as can easily be seen in perturbation theory. A renormalization of  $A^2$  was defined in [2,3] within the OPE context which we now briefly summarize. It uses the notion of “normal order product” in a “perturbative vacuum” which is annihilated by the fields  $A$ . It implies that  $\langle :A(0)^2: \rangle_{\text{pert}} = 0$  in the perturbative vacuum.<sup>1</sup> The contribution to  $\langle :A(0)^2: \rangle$  in the true QCD vacuum is then of nonperturbative origin. It has only logarithmic divergences and it is multiplicatively renormalized. Of course this notion of a perturbative vacuum in which Fock expansion could be performed has not a very transparent physical meaning, especially in a nonperturbative context such as the numerical Euclidean path integral method.

$A^2$  is not a gauge invariant operator but the bare  $A^2$  condensate is a very special object since, by definition, it is a

minimum of the gauge orbit [6]. In other words, some important physics seems to lie beneath the Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) invariance of  $A^2$  in Landau gauge. The authors of Ref. [5] discussed on the generalized<sup>2</sup> composite operator  $A_\mu A^\mu + 2i(1 - \xi)\bar{c}c$ , which is BRST invariant in the manifestly Lorentz covariant gauge, and examined the survival of this invariance after renormalization. In this paper, although in a different context, we also examine the same point: the subtle relationship between the minimum of bare  $A^2$  in the gauge orbit and any gauge-independent physical phenomenology associated to the renormalized condensate [6], emerging for instance from the OPE analysis [1–4]. To this aim, we will derive the renormalized  $A^2$  vacuum expectation value without using the normal ordering but using only the OPE expansion of the gluon propagator.<sup>3</sup> It will provide a more transparent definition, related directly to a quantity which is actually measured.

We start from the observation that the non renormalized  $\langle A(0)^2 \rangle$  is related to the integral of the gluon propagator over momentum. Hence it is expected that the nonperturbative contribution to  $A^2$  has to do with the nonperturbative contribution to the gluon propagator. The latter contains precisely  $1/p^2$  contributions due to the  $A^2$  condensate at large momenta, and also strong deviations from perturbative QCD at small momenta, see Fig. 1 (taken from [1–4]). How does this fit together?

## II. BARE, PERTURBATIVE AND NONPERTURBATIVE $A^2$

It is possible in principle from lattice calculations to define the nonperturbative gluon propagator in the Landau gauge. Lattice calculations provide the bare gluon propaga-

<sup>1</sup>The symbol “ $: \dots :$ ” represents the normal ordered product in this perturbative vacuum.

<sup>2</sup>Landau gauge is recovered in the limit  $\xi \rightarrow 1$ .

<sup>3</sup>Of course the normal ordering has been used in [2,3] to compute the anomalous dimension of  $A^2$  and the Wilson coefficient  $c_2$ .

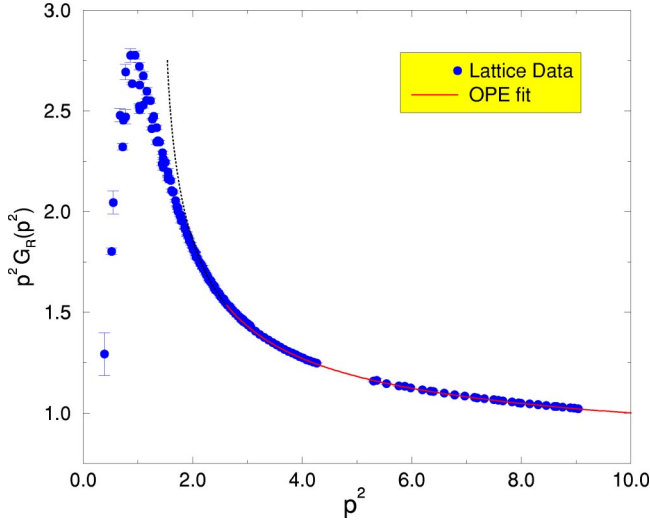


FIG. 1. Gluon propagator extracted from lattice calculations renormalized at  $\mu = 10$  GeV and plotted between 0 and 9 GeV. The curve corresponds to the fit written in Eq. (7). It results that the infrared cutoff  $p_{\min}$  can be safely taken around 2.6–3.0 GeV.

tor. From the gluon propagator computed with a series of different values of the lattice spacing one can in principle compute the renormalized gluon propagator from zero momentum up to as large a momentum as one wishes. An example of such a nonperturbative propagator is shown in Fig. 1. We can choose, for example, the momentum subtraction (MOM) renormalization scheme,<sup>4</sup> such that

$$G_R^{(2)}(p^2 = \mu^2) = \frac{1}{\mu^2}. \quad (1)$$

This implies a renormalization of the gluon fields

$$A_{\nu R} = Z_3(\mu)^{-1/2} A_{\nu \text{bare}}, \quad Z_3(\mu) \equiv \mu^2 G_{\text{bare}}^{(2)}(\mu^2). \quad (2)$$

The renormalization constant  $Z_3$  has to be understood as related to any regularization method and any value of the UV regulator provided that the latter is larger than the momenta carried by the gluons. The coupling constant is also renormalized in a MOM scheme. Initially, the particular kinematics of the three-gluon vertex leading to the definition of the coupling should be specified. In fact, the perturbative + OPE analysis we show in Fig. 1 is performed with the choice of the asymmetric  $\tilde{\text{MOM}}$  scheme, one of the incoming gluon momenta being zero. Concerning the conclusions of the present paper, they shall be derived from leading-logarithm computations which are not affected by the kinematics of the renormalization point for  $\alpha$ , then we do not specify the ki-

<sup>4</sup>Notice that the chosen renormalization scheme is not relevant in our argument in this paper, but we clearly need a scheme in which nonperturbative quantities coming from lattice simulations can be accommodated. MOM is one of the simplest. On the contrary the modified minimal subtraction ( $\overline{\text{MS}}$ ) scheme does not satisfy this condition.

nematics any more on the following. The Yang-Mills theory is thus fully renormalized and from now on we will consider only renormalized gauge fields and propagators.

The propagator is defined in Euclidean space by

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle A_{\mu R}^a(0) A_{\nu R}^b(x) \rangle \\ &= \delta_{a,b} \left[ \delta_{\mu,\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] G_R(p^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Inverting the Fourier transform,

$$\begin{aligned} \sum_{a,\mu} \langle A_{\mu R}^a(0) A_{\mu R}^a(0) \rangle &= \frac{3(N_c^2 - 1)}{(2\pi)^4} \int d^4p G_R^{(2)}(p^2) \\ &= \frac{3(N_c^2 - 1)}{16\pi^2} \int p^2 dp^2 G_R^{(2)}(p^2). \end{aligned} \quad (4)$$

This integral is quadratically divergent in the ultraviolet. Indeed, if the gauge fields and the coupling constant have been renormalized, the local  $A^2$  operator has not yet. Let us introduce an ultraviolet cutoff  $\Lambda$  and define

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda = \frac{3(N_c^2 - 1)}{16\pi^2} \int_0^\Lambda p^2 dp^2 G_R^{(2)}(p^2), \quad (5)$$

where  $(A_R(\mu))^2$  refers to the square of the gauge fields renormalized at the scale  $\mu$ , but where  $A^2$  has *not been renormalized as a local product of operators*. The symbol “ $\langle \dots \rangle$ ” represents the vacuum expectation value (VEV).  $(A_R)^2$  is clearly an UV divergent quantity. The index  $\Lambda$  refers to the ultraviolet cutoff and  $\mu$  to the renormalization point for the gauge fields and the coupling constant. The cutoff  $\Lambda$  has nothing to do with the lattice cutoff  $a^{-1}$ . The renormalization in Eqs. (1) and (2) has eliminated any dependence in the different lattice spacings which have been used to produce the renormalized propagator.  $\Lambda$  is introduced simply to control the quadratic and logarithmic divergences we encounter here.

The dominant contribution to this integral is the perturbative one. To separate the perturbative contribution from the nonperturbative we will now use the results of [3],

$$\begin{aligned} p^2 G_R^{(2)}(p^2, \mu^2) &\equiv \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G^{(2)}(\mu^2)} \\ &= c_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) + c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \\ &\quad \times \frac{\langle (A_R^2)(\mu) \rangle}{4(N_c^2 - 1)} \frac{1}{p^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $G^{(2)}(p^2)$  is the bare propagator. This expansion does not exactly separate the perturbative from the nonperturbative contribution because of the denominator  $\mu^2 G^{(2)}(\mu^2)$

which contains a nonperturbative contribution. It is therefore convenient to introduce a slightly different renormalization  $R'$ :

$$\begin{aligned} p^2 G_{R'}^{(2)}(p^2, \mu^2) &\equiv \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G_{\text{pert}}^{(2)}(\mu^2)} \\ &= \frac{c_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)}{c_0(1, \alpha(\mu))} + \frac{c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)}{c_0(1, \alpha(\mu))} \\ &\quad \times \frac{\langle (A^2)_R(\mu) \rangle}{4(N_c^2 - 1)} \frac{1}{p^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $(A^2)_R(\mu)$  represents the  $A^2$  operator renormalized as a local operator at the scale  $\mu$ . Here the denominator is only the perturbative contribution to the Green function whence the first term in Eq. (7) is purely perturbative: it runs perturbatively with a perturbative MOM renormalization condition at  $p^2 = \mu^2$ . Let us define for simplicity the constant

$$z_0 \equiv \frac{1}{c_0(1, \alpha(\mu))} = \frac{G^{(2)}(\mu^2)}{G_{\text{pert}}^{(2)}(\mu^2)} = 1 + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \quad (8)$$

We know from [3] that the first term in Eq. (7),  $z_0 c_0(p^2/\mu^2, \alpha(\mu))$ , represents the three loop perturbative contribution. The second,  $z_0 c_2(p^2/\mu^2, \alpha(\mu))$ , appears as the leading logarithm Wilson coefficient of the first nonperturbative correction ( $O(1/p^2)$ ), which we attributed [3] to the vacuum expectation value of the renormalized local operator  $\langle (A^2)_R(\mu) \rangle$ .

Let us now introduce some notations:

$$\begin{aligned} (A^2)_R(\mu) &= Z_{A^2}^{-1}(\mu) : A_{\text{bare}}^2 : \\ &= [Z_{A^2}(\mu) Z_3^{-1}(\mu)]^{-1} : (A_R(\mu))^2 :, \end{aligned} \quad (9)$$

where the symbol  $:\dots:$  represents the normal ordered product in the perturbative vacuum.<sup>5</sup> We define  $\hat{Z}(\mu) \equiv Z_3^{-1}(\mu) Z_{A^2}(\mu)$ , the anomalous dimension for these renormalization constants given by

$$\begin{aligned} \gamma_{A^2}(\alpha(\mu)) &\equiv \frac{d}{d \ln \mu^2} \ln Z_{A^2}(\mu) = -\frac{35N_C}{12} \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \dots, \\ \hat{\gamma}(\alpha(\mu)) &\equiv \frac{d}{d \ln \mu^2} \ln \hat{Z}(\mu) = -\hat{\gamma}_0 \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \dots \\ &= -\frac{3N_C}{4} \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \dots. \end{aligned} \quad (10)$$

Our main goal in this paper is to understand better the connection between  $\langle (A^2)_R(\mu) \rangle$  defined in [3] and the  $(A_R(\mu))^2$  object considered here.

The expansion in Eq. (7) is only valid above some momentum  $p \geq p_{\min}$ . Typically we have taken  $p_{\min} = 2.6 \text{ GeV}$  for our fits reported in [1–4].

From Eqs. (5), (7) we decompose

$$\begin{aligned} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda &= \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} + \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \\ &\quad + \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}} \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} = \frac{3(N_c^2 - 1)z_0}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} dp^2 c_0\left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu)\right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} &= \frac{3(N_c^2 - 1)z_0}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} c_2\left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu)\right) \\ &\quad \times \frac{\langle (A^2)_R(\mu) \rangle}{4(N_c^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}} = \frac{3(N_c^2 - 1)}{16\pi^2} \int_0^{p_{\min}^2} p^2 dp^2 G_{R'}^{(2)}(p^2). \quad (14)$$

A few comments are in order here.  $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}}$  corresponds indeed to the perturbative computation of the vacuum expectation value of  $A^2$ , i.e., to the connected diagrams with no external legs and with one  $A^2$  inserted. However, the coupling constant and the gluon fields in the diagrams have been consistently renormalized at the scale  $\mu$ . To leading order Eq. (12) leads to

$$\begin{aligned} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3(N_c^2 - 1)}{16\pi^2} \Lambda^2 \left\{ \left( \frac{\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)}{\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)} \right)^{\gamma_0/\beta_0} \right. \\ &\quad \times \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)}\right) \right] + O\left(\frac{p_{\min}^2}{\Lambda^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

which diverges more than quadratically. Note that the dependence in  $p_{\min}^2$  is subdominant.

In Eq. (13) the left-hand side has been defined from the decomposition of the integral (5) according to Eq. (7). The right-hand side contains  $\langle (A^2)_R(\mu) \rangle$  already discussed. The latter is just a number which factorizes out of the integral in Eq. (13). We thus see that  $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}}$  and  $\langle (A^2)_R(\mu) \rangle$  are proportional.

<sup>5</sup>The  $:\dots:$  symbols have been erroneously omitted in [3].



Our next task is to compute the proportionality coefficient and to compare  $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}}$  with the other subleading term,  $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}}$ . From [3] and Eq. (8) we know that  $z_0 = 1 + O(1/\mu^2)$ . In our calculation of the integral in Eq. (13), being performed to the leading logarithm, we will take  $z_0 c_2 = c_2$  in the following. From (23) in [3],

$$c_2 \left( \frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = 12\pi \alpha(p) \left( \frac{\alpha(p)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0}. \quad (16)$$

Let us also recall

$$Z_3(\mu) \propto (\alpha(\mu))^{\gamma_0/\beta_0}, \quad \langle (A^2)_R(\mu) \rangle \propto (\alpha(\mu))^{-\gamma_{A^2}/\beta_0} \quad (17)$$

with

$$\beta_0 = 11, \quad \gamma_0 = 13/2, \quad \gamma_{A^2} = \frac{35}{4}, \quad \hat{\gamma}_0 = \gamma_{A^2} - \gamma_0 = \frac{9}{4}. \quad (18)$$

From Eq. (13) and the leading logarithm relation

$$dp^2/p^2 = d\log(p^2) \simeq -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \quad (19)$$

we find

$$\begin{aligned} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} &= \frac{3(N_c^2 - 1)}{16\pi^2} \frac{(12\pi)}{(\alpha(\mu))^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0}} \\ &\times \frac{\langle (A^2)_R(\mu) \rangle}{4(N_c^2 - 1)} \frac{4\pi}{\beta_0} \int_{\alpha(\Lambda)}^{\alpha(p_{\min})} d\alpha \alpha^{-1 - (\hat{\gamma}_0/\beta_0)} \\ &= \langle (A^2)_R(\mu) \rangle \\ &\times \left[ \left( \frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0} - \left( \frac{\alpha(p_{\min})}{\alpha(\mu)} \right)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

It is interesting to notice that the coefficient  $\beta_0/\hat{\gamma}_0$  stemming from the integration over  $\alpha$  is exactly compensated by the prefactors outside the integral, the origin of which does not appear at first sight to be related to the anomalous dimension of  $A^2$ . Had we taken any other anomalous dimension instead of  $\hat{\gamma}_0$ , say some  $\gamma'$ , we would have ended with a constant  $9/(4\gamma')$  in front of the RHS of Eq. (20).

In the large  $\Lambda$  limit,  $\alpha(p_{\min}) \gg \alpha(\Lambda)$  whence, since  $\hat{\gamma}_0$  is positive, the main result of this paper comes from

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\simeq} \langle (A^2)_R(\mu) \rangle \left( \frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0}. \quad (21)$$

To leading logarithms and keeping  $\mu$  fixed,

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \propto \alpha(\Lambda)^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \infty. \quad (22)$$

On the other hand, from Eq. (14)

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}} = \text{const.} \quad (23)$$

since it does not depend on  $\Lambda$ . It results that  $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}}$  is dominant over  $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}}$  in the decomposition (11). This dominance will lead to the coming interpretation (next section) of the decomposition (11), which is indeed the main result of this note. Of course, we perform our analysis in the Landau gauge because of its conceptual [6] and numerical (lattice Green functions [3]) particular interest. However, the survival after renormalization of BRST invariance in covariant gauges for the generalized composite operator claimed in Ref. [5] seems to point out that an analogous analysis, with similar results, for these gauges might be performed. However, this is hard to do because of the renormalization mixing of both local operators  $A^2$  and  $\bar{c}c$  (the renormalization of the generalized composite operator not being diagonal except for very particular cases [5]).

As an interesting special case, if  $\mu = \Lambda$

$$\langle (A_R(\Lambda))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \langle (A^2)_R(\Lambda) \rangle \propto (\alpha(\Lambda))^{-\gamma_{A^2}/\beta_0}. \quad (24)$$

### III. CONCLUSION AND DISCUSSION

Our conclusion is summarized in

$$\begin{aligned} \langle (A^2)_R(\mu) \rangle &\simeq \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \left( \frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{\hat{\gamma}_0/\beta_0} \\ &\simeq [\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda - \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}}] \left( \frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{\hat{\gamma}_0/\beta_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

Since notations are not conventional let us recall that the  $\langle \dots \rangle_\Lambda$ 's in the RHS represent the gluon propagator integrated over momentum up to an UV cutoff,  $\Lambda$ , see Eqs. (5) and (12). The gluon fields and coupling constants are renormalized in all the terms appearing in these equations. Thus we learn that the further renormalization of the local operator  $A^2$  proceeds by subtracting to the plain vacuum expectation value of  $A^2$  the same object computed in perturbation. This logarithmically divergent difference is then renormalized by the powers of  $\alpha$  in the RHS of Eq. (25). Not unexpectedly, we retrieve in essence the initial expression of the renormalization of the  $A^2$  operator through normal ordering (i.e., subtraction of the perturbative VEV), followed by the multiplicative, logarithmic renormalization  $Z_{A^2}$ . But apart from a nontrivial consistency check, involving in particular the detailed expression of the Wilson coefficient, we obtain an expression which is more transparent, since it only involves a measurable quantity, the integral over the renormalized propagator.

Equation (25) presents a separation between perturbative and nonperturbative contributions to the integrated propaga-

tor, i.e., to  $A^2$ . Of course, such a separation depends on the renormalization scheme, and on the order in perturbation theory in which the Green functions are computed. It is also well known that summing to infinity the perturbative series may generate renormalons which behave like nonperturbative condensates. To avoid any such problem we stick to a finite order in the perturbative series. Furthermore, if the quantitative separation between perturbative and nonperturbative contributions depends on these prescriptions, the results summarized in Eq. (25) *do not depend on them* provided that we use *the same* scheme and order when computing both sides of Eq. (25). Of course the anomalous dimensions to leading logarithms do not either depend on them.

This simple result has several interesting consequences. First, it has been advocated [4] that the  $A^2$  condensate could be dominantly due to the contribution to the path integral of semiclassical gauge field configurations such as instantons liquids. It is useful to consider this hypothesis through a background field picture, i.e., factorizing the path integral into an integral over semiclassical gauge field configurations, and for each value of these an integral over quantum fluctuations around this background configuration. It means that the Hermitian matrix  $A_\mu$  is decomposed into

$$A_\mu = B_\mu + Q_\mu(B), \quad A^2 = B^2 + \{B \cdot Q\}_+ + Q^2(B), \quad (26)$$

$B_\mu$  being the background, assumed to be nonperturbative, and  $Q_\mu$  the quantum fluctuations assumed to be perturbative.  $\{B \cdot Q\}_+ \equiv B \cdot Q + Q \cdot B$ . In principle,  $Q_\mu$  depends on  $B_\mu$  and differs from the quantum fluctuations around the trivial vacuum  $B_\mu = 0$  which is what perturbative QCD computes. The hypothesis that  $\langle (A^2)_R \rangle$  is due<sup>6</sup> to these semiclassical gauge configurations is translated into  $(A^2)_R \approx B^2$ . From Eqs. (25) and (26)

$$\langle (A^2)_R \rangle \approx \langle B^2 \rangle \approx \langle A^2 \rangle - \langle Q^2(B=0) \rangle \quad (27)$$

i.e., that  $[Q^2(B) - Q^2(B=0)]$  is subleading.<sup>7</sup> In other words, the dependence of  $Q_\mu$  on  $B_\mu$  is subleading. The hard quantum fluctuations are not sensitive to the soft background field.

A most interesting consequence of our result is related to some discussions in [6]. These authors extend to QCD some remarks stemming from compact  $U(1)$ . They attribute a special role to the  $A^2$  condensate, even if a gauge dependent quantity, by arguing that  $A^2$  in the Landau gauge is the minimum of  $A^2$  on the gauge orbit. One difficulty in this argument is the following: Fixing the Landau gauge amounts to minimizing the  $\langle A_{\text{bare}}^2 \rangle$  while the condensate refers to some

renormalized quantity free of the quadratic and logarithmic divergences. In compact  $U(1)$  life is simpler:

$$\langle A_{\text{bare}}^2 \rangle = \langle A_{\text{pert}}^2 \rangle + \langle A_{\text{nonpert}}^2 \rangle, \quad (28)$$

the perturbative theory is trivial and the nonperturbative contribution is due, roughly speaking, to the topology. A phase transition when the coupling constant varies allows us to measure directly the non perturbative contribution. We refer to [6] for more details. Our result Eq. (25), exhibits in QCD, up to subleading contributions, a linear decomposition similar to Eq. (28), although such a similarity is not at all obvious at first sight. The next question could be whether in some sense the  $\langle A^2 \rangle^{\text{OPE}}$  computed in the Landau gauge is the minimum of some quantity on the gauge orbit.

Last but not least, let us simply say that the result in Eq. (25) provides a fairly simple understanding of what the  $A^2$  condensate is. *It confirms that indeed the  $O(1/p^2)$  correction to perturbative QCD at large momenta has to do with the  $A^2$  condensate.* Indeed, if one starts with some doubt about the relation of the RHS of Eq. (13) with an  $A^2$  condensate, just considering it as an unidentified  $1/p^2$  contribution, we end-up with the conclusion that it yields a nonperturbative contribution to the  $A^2$  VEV. The fact that in our derivation this term has precisely the anomalous dimension of an  $A^2$  condensate comes from the fact that  $c_2$  in the RHS of Eq. (13) has been computed under the assumption that it is due to an  $A^2$  condensate, an assumption which has been shown to fit fairly well the lattice data. Had we used another scale dependence for  $c_2$  we would have ended with a wrong scale dependence for the resulting nonperturbative contribution to the  $A^2$  VEV. We would have also ended with a constant different from 1 in front of the RHS of Eq. (25); see the discussion following Eq. (20). In fact, the necessity of this factor 1 in front of the RHS of Eq. (25) could be thought to introduce, at least up to one loop, a bound for  $A^2$  and gluon anomalous dimensions and  $\beta$  function. A very recent work [7], which has appeared while this note was under consideration, confirms such a bound up to all the orders in pure Yang-Mills theory in the Landau gauge within the algebraic renormalization. Thus the picture is fully consistent. On the other hand, this result strongly supports the existence of some underlying Slavnov-Taylor identity at the origin of such a bound and opens the possibility to extend the results of this paper, in particular Eq. (25), beyond the leading logarithm approximation. How to do it, within the MOM renormalization scheme, is a work in progress.

## ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to V.I. Zakharov for illuminating discussions. This work was supported in part by the European Union Human Potential Program under contract HPRN-CT-2000-00145, Hadrons/Lattice QCD. Laboratoire de Physique Theorique is Unité Mixte de Recherche du CNRS-UMR 8627.

<sup>6</sup>This discussion is qualitative and we do not know how to define rigorously the corresponding scale  $\mu$ . We therefore prefer to omit writing  $\mu$  here.

<sup>7</sup>If  $B$  is a classical solution of the field equations, the term linear in  $Q$  will vanish.  $B$  should be close to such a solution and we therefore neglect  $\{B \cdot Q\}_+$ .



- [1] P. Boucaud *et al.*, J. High Energy Phys. **04**, 006 (2000); D. Becirevic, P. Boucaud, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, J. Rodriguez-Quintero, and C. Roiesnel, Phys. Rev. D **61**, 114508 (2000); **60**, 094509 (1999).
- [2] P. Boucaud, A. Le Yaouanc, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Lett. B **493**, 315 (2000); F. De Soto and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D **64**, 114003 (2001).
- [3] P. Boucaud, A. Le Yaouanc, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D **63**, 114003 (2001).
- [4] P. Boucaud *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 034504 (2002); hep-ph/0205187.
- [5] K. I. Kondo Phys. Lett. B **514**, 335 (2001); K. I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, and T. Imai, Phys. Rev. D **65**, 085034 (2002).
- [6] F. V. Gubarev and V. I. Zakharov, Phys. Lett. B **501**, 28 (2001); F. V. Gubarev, L. Stodolsky, and V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **86**, 2220 (2001); F. V. Gubarev, M. I. Polikarpov, and V. I. Zakharov, hep-ph/9908292; K. G. Chetyrkin, S. Narison, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B550**, 353 (1999).
- [7] D. Dudal, H. Verschelde, and S. P. Sorella, Phys. Lett. B **555**, 126 (2003).

---

## Bibliographie

---

- [Adl69] S.L. Adler, *Axial vector vertex in spinor electrodynamics*, Phys. Rev. **177** (1969) 2426.
- [AFS03] R. Alkofer, C.S. Fischer et L. von Smekal, *Kugo-Ojima confinement criterion, Zwanziger-Gribov horizon condition, and infrared critical exponents in Landau gauge QCD*, hep-ph/0301107.
- [Ahl92] J. Ahlback, M. Lavelle, M. Schaden et A. Streibl, *Propagators and four-dimensional condensates in pure QCD*, Phys. Lett. **B275** (1992) 124.
- [Ale02] A. Alekseev, *Strong coupling constant to four loops in the analytic approach to QCD*, hep-ph/0211339.
- [ALE99] R. Barate et al., Coll. ALEPH, *Measurement of the spectral functions of vector current hadronic tau decays*, Zeit. Phys. **C76** (1997) 15.
- [All96a] B. Alles, D. Henty, H. Panagopoulos, C. Parinello, C. Pittori, D.G. Richards,  $\alpha_S$  from the non-perturbatively renormalised lattice three-gluon vertex, Nucl. Phys. **B502** (1987) 325, hep-lat/9605033.
- [All96b] B. Alles, H. Panagopoulos, C. Parrinello, C. Pittori et D. G. Richards, *Status of  $\alpha_S$  determinations from the non-perturbatively renormalised three-gluon vertex*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B63** (1998) 245, hep-lat/9710053.
- [AS84] M.F. Atiyah et I.M. Singer, *Dirac operators coupled to vector potentials*, Proc. Nat. Acad. Sci. **81** (1984) 2597.
- [AV02] K. van Acoleyen et H. Verschelde, *Avoiding the Landau pole in perturbative QCD*, J. High Energy Phys. **04** (2002) 048, hep-ph/0203211.
- [AZ91] G. dell'Antonio et Daniel Zwanziger, *Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon*, Comm. Math. Phys. **138** (1991) 291.
- [Baa92] P. van Baal, *More (thoughts on) Gribov copies*, Nucl. Phys. **B369** (1992) 259.
- [Baa97] P. van Baal, *Gribov ambiguities and the fundamental domain*, hep-th/9711070.
- [BC80] T. Banks, A. Casher, *Chiral symmetry breaking in confining theories*, Nucl. Phys. **B169** (1980) 103.

- [Bec99] D. Becirevic, Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et C. Roiesnel, *Asymptotic behaviour of the gluon propagator from lattice QCD*, Phys. Rev. **D60** (1999) 094509, hep-ph/9903364.
- [Bel75] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz et Yu. Tyupkin, *Pseudoparticles solutions of the Yang-Mills equations*, Phys. Lett. **B59** (1975) 85.
- [Ben98] M. Beneke, *Renormalons*, Phys. Rep. 317 (1999) 1, hep-ph/9807443.
- [Bet02] S. Bethke,  $\alpha_S$  2002, hep-ex/0211012.
- [BG02] R.E. Browne et J.A. Gracey, en préparation d'après hep-th/0211144.
- [BJ69] J.S. Bell et R. Jackiw, *A PCAC puzzle :  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$ -model*, Nuovo Cim. **A60** (1969) 47.
- [BNP92] E. Braaten, S. Narison et A. Pich, *QCD analysis of the tau hadronic width*, Nucl. Phys. **B373** (1992) 581.
- [Bod01] A. Bode, R. Frezzotti, B. Gehrman, M. Hasenbusch, J. Heitger, K. Jansen, S. Kurth, J. Rolf, H. Simma, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz, H. Wittig, U. Wolff, *First results on the running coupling in QCD with two massless flavours*, Phys. Lett. **B515** (2001) 49, hep-lat/0105003.
- [Bog99a] I.L. Bogolubsky, L. del Debbio et V.K. Mitrjushkin, *Gribov copies and gauge variant correlators in  $U(1)$  lattice gauge theory*, Phys. Lett. **B463** (1999) 109, hep-lat/9903015.
- [Bog99b] I.L. Bogolubsky, V.K. Mitrjushkin, M. Müller-Preussker et P. Peter, *Lorentz gauge and Gribov ambiguities in the compact lattice  $U(1)$  theory*, Phys. Lett. **B458** (1999) 102, hep-lat/9904001.
- [Boo01] S. Booth, M. Göckeler, R. Horsley, A.C. Irving, B. Joo, S. Pickles, D. Pleiter, P.E.L. Rakow, G. Schierholz, Z. Sroczynski et H. Stüben, *Determination of  $\Lambda_{\overline{MS}}$  from quenched and  $n_f = 2$  dynamical QCD*, Phys. Lett. **B519** (2001) 229, hep-lat/0103023.
- [Bou98] Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène et C. Roiesnel, *Lattice calculation of  $\alpha_S$  in momentum scheme*, J. High Energy Phys. **10** (1998) 017, hep-ph/9810322.
- [Bou00a] Ph. Boucaud, G. Burgio, F. di Renzo, J.P. Leroy, J. Micheli, C. Parrinello, O. Pène, C. Pittori, J. Rodríguez-Quintero, C. Roiesnel et K. Sharkey, *Lattice calculation of  $1/p^2$  corrections to  $\alpha_S$  and of  $\Lambda_{QCD}$  in the  $\overline{MOM}$  scheme*, J. High Energy Phys. **04** (2000) 006, hep-ph/0003020v2.
- [Bou00b] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero, *Consistent OPE of gluon two- and three-point Green functions?*, Phys. Lett. **B493** (2000) 315, hep-ph/0008043.

- [Bou01a] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero, *Testing Landau gauge OPE on the lattice with an  $\langle A^2 \rangle$  condensate*, Phys. Rev. **D63** (2001) 114003, hep-ph/0101302.
- [Bou01b] Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et C. Roiesnel, *Preliminary calculation of  $\alpha_S$  from Green functions with dynamical quarks*, J. High Energy Phys. **01** (2002) 046, hep-ph/0107278v3.
- [Bou02a] Ph. Boucaud, A. Donini, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et F. de Soto, *Instantons and  $\langle A^2 \rangle$* , Phys. Rev. **D66** (2002) 034504, hep-ph/0203119v2.
- [Bou02b] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et F. de Soto, *A transparent expression of the  $A^2$ -condensate's renormalisation*, Phys. Rev. **D67** (2003) 074027, hep-ph/0208008.
- [Bou02c] Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero et F. de Soto, *The strong coupling constant at small momentum as an instanton detector*, J. High Energy Phys. **04** (2003) 005, hep-ph/0212192.
- [BS92] G.S. Bali, K. Schilling, *Running coupling and the Lambda-parameter from  $SU(3)$  lattice simulations*, Phys. Rev. **D47** (1993) 661, hep-lat/9208028.
- [BTM82] L. Baulieu et J. Thierry-Mieg, *The principle of BRS symmetry: An alternative approach to Yang-Mills theories*, Nucl. Phys. **B197** (1982) 477.
- [Cal82] C. de Calan, *Théorie perturbative des champs*, ed. par CPhT, Polytechnique, 1982.
- [Cap99] S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer et H. Wittig, *Non-perturbative quark mass renormalization in quenched lattice QCD*, Nucl. Phys. **B544** (1999) 669, hep-lat/9810063.
- [CF76] G. Curci et R. Ferrari, *On a class of Lagrangian models for massive and massless Yang-Mills fields*, Nuovo Cim. **A32** (1976) 151.
- [CLE95] T. Coan et al., Coll. CLEO, *Measurement of  $\alpha_S$  from  $\tau$  decays*, Phys. Lett. **B356** (1995) 580.
- [Cre83] M. Creutz, *Quarks, gluons and lattices*, Cambridge University Press, 1983.
- [CTW02] N. Cundy, M. Teper et U. Wenger, *Topology and chiral symmetry breaking in  $SU(N)$  gauge theories*, Phys. Rev. **D66** (2002) 094505, hep-lat/0203030.
- [Cuc97] A. Cucchieri, *Gribov Copies in the Minimal Landau Gauge: the Influence on Gluon and Ghost Propagators*, Nucl. Phys. **B508** (1997) 353, hep-lat/9705005.

## BIBLIOGRAPHIE

- [CM03] A. Cucchieri et T. Mendes, *SU(2) Landau gluon propagator on a  $140^3$  lattice*, hep-lat/0302022v2.
- [Dav97] C.T.H. Davis et al., *Further Precise Determinations of  $\alpha_s$  from Lattice QCD*, Phys. Rev. **D56** (1997) 2755, hep-lat/9703010.
- [Del02] B. Delamotte, *A hint of renormalization*, hep-th/0212049.
- [Dia96] D. Diakonov, *Chiral symmetry breaking by instantons*, Lectures at the Enrico Fermi School in Physics, Varenna, June 27 - July 7, 1995, hep-ph/9602375.
- [Div94] G. de Divitiis, R. Frezzotti, M. Guagnelli et R. Petronzio, *Nonperturbative determination of the running coupling constant in quenched SU(2)*, Nucl. Phys. **B433** (1995) 390, hep-lat/9407028.
- [DMW95] Yu.L. Dokshitzer, G. Marchesini et B.R. Webber, *Dispersive Approach to Power-Behaved Contributions in QCD Hard Processes*, Nucl. Phys. **B469** (1996) 93, hep-ph/9512336.
- [DP84] D. Diakonov et V. Petrov, *A theory of light quarks in the instanton vacuum*, Nucl. Phys. **B245** (1984) 259.
- [Dud03a] D. Dudal, H. Verschelde, R.E. Browne et J.A. Gracey, *A determination of  $\langle A_\mu^2 \rangle$  and the non-perturbative vacuum energy of Yang-Mills theory in the Landau gauge*, hep-th/0302128.
- [Dud03b] D. Dudal, H. Verschelde, V.E.R. Lemes, M.S. Sarandy, S.P. Sorella et M. Picariello, *Gluon-ghost condensate of mass dimension two in the Curci-Ferrari gauge*, hep-th/0302168.
- [DVS02] D. Dudal, H. Verschelde et S.P. Sorella, *The anomalous dimension of the composite operator  $A^2$  in the Landau gauge*, Phys. Lett. **B555** (2003) 126, 2003, hep-th/0212182.
- [DW95] Yu.L. Dokshitzer et B.R. Webber, *Calculation of power corrections to hadronic event shapes*, Phys. Lett. **B352** (1995) 451, hep-ph/9504219.
- [Dys52] F. Dyson, *Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **85** (1952) 631.
- [Edw01] R.G. Edwards, *Topology and low lying fermion modes*, Plenary talk at the 19th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2001), Berlin, Germany, 19-24 Aug. 2001, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B106** (2002) 159, hep-lat/011109.
- [EH01] R.G. Edwards et U.M. Heller, *Are topological charge fluctuations in QCD instanton dominated?*, Phys. Rev. **D65** (2002) 014505, hep-lat/0105006.
- [EHK97] R.G. Edwards, U.M. Heller, T.R. Klassen, *The effectiveness of non-perturbative  $O(a)$  improvement in lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3448, hep-lat/9711052.

- [EK96] A.X. El-Khadra,  $\alpha_S$  with Lattice QCD, Proceedings of the XXXIst Rencontre de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories, Les Arcs 1800, France, March 16-23, 1996, hep-ph/9608220.
- [For97a] Ph. de Forcrand, M. García Pérez et I.-O. Stamatescu, *Topology of the  $SU(2)$  vacuum: a lattice study using improved cooling*, Nucl. Phys. **B499** (1997) 409, hep-lat/9701012v2.
- [For97b] Ph. de Forcrand, *Fermionic Monte Carlo algorithms for lattice QCD*, Int. conf. on multi-scale phenomena and their simulation, 30/09-4/10/96, Bielefeld, Germany, hep-lat/9702009.
- [Fuj79] K. Fujikawa, *Path integral measure for gauge invariant fermion theories*, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195.
- [Gad02] W.A. Gaddah, *A new analytic approach to physical observables in QCD*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 271601, hep-th/0206177.
- [GGK98] E. Gardi, G. Grunberg et M. Karliner, *Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure?*, J. High Energy Phys. **07** (1998) 007, hep-ph/9806462.
- [GH01] Th. de Grand et A. Hasenfratz, *Comment on “Evidence against instanton dominance of topological charge fluctuations in QCD”*, Phys. Rev. **D65** (2002) 014503, hep-lat/0103002.
- [Gim00] V. Gimenez, L. Giusti, G. Martinelli, F. Rapuano, *NNLO Unquenched Calculation of the  $b$  Quark Mass*, J. High Energy Phys. **03** (2000) 018, hep-lat/0002007.
- [Giu98] L. Giusti, M.L. Paciello, S. Petrarca, B. Taglienti et M. Testa, *On the definition of gauge field operators in lattice gauge-fixed theories*, Phys. Lett. **B432** (1998) 196, hep-lat/9803021.
- [Giu01] L. Giusti, M.L. Paciello, C. Parinello, S. Petrarca et B. Taglienti, *Problemes on lattice gauge fixing*, Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 3487, hep-lat/0104012.
- [Giu02] L. Giusti, S. Petrarca, B. Taglienti et N. Tantalo, *Remarks on the gauge dependence of the RI/MOM renormalisation procedure*, Phys. Lett. **B541** (2002) 350, hep-lat/0205009.
- [GJ81] J. Glimm et A. Jaffe, *Quantum physics, a functional integral point of view*, Springer, Berlin, 1981.
- [Gra02] J.A. Gracey, *Three loop  $\overline{MS}$  renormalization of the Curci-Ferrari model and the dimension two BRST invariant composite operator in QCD*, Phys. Lett. **B552** (2003) 101, hep-th/0211144.
- [Gri78] V. Gribov, *Quantization of non-abelian gauge theories*, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1.
- [Gru01] G. Grunberg, *Conformal window and Landau singularities*, J. High Energy Phys. **08** (2001) 019, hep-ph/0104098.

## BIBLIOGRAPHIE

- [GSZ00] F.V. Gubarev, L. Stodolsky et V.I. Zakahrov, *On the significance of the quantity  $A^2$* , Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2220, hep-ph/0010057.
- [GZ00] F.V. Gubarev et V.I. Zakharov, *On the emerging phenomenology of  $\langle (A_\mu^a)^2_{min} \rangle$* , Phys. Lett. **B501** (2001) 28, hep-ph/0010096.
- [Hei01] J. Heitger, H. Simma, R. Sommer, U. Wolff, *The Schrödinger functional coupling in quenched QCD at low energies*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B106** (2002) 859, hep-lat/0110201.
- [Hip01] I. Hip, Th. Lippert, H. Neff, K. Schilling et W. Schroers, *Instanton dominance of topological charge fluctuations in QCD?*, Phys. Rev. **D65** (2002) 014506, hep-lat/0105001.
- [Hor01] I. Horvath, N. Isgur, J. McCune et H.B. Thacker, *Evidence against instanton dominance of topological charge fluctuations in QCD*, Phys. Rev. **D65** (2002) 014502, hep-lat/0102003.
- [Jan01] K. Jansen, *Overlap and domain wall fermions: what is the price of chirality?*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B106** (2002) 191, hep-lat/0111062.
- [JW00] A. Jaffe et E. Witten, *Quantum Yang-Mills Theory*, <http://www.claymath.org/prizeproblems/yangmills.htm>.
- [Kap92] D.B. Kaplan, *A method for simulating chiral fermions on the lattice?*, Phys. Lett. **B288** (1992) 342, hep-lat/9206013.
- [Kar01] F. Karsch, *Lattice QCD at high temperature and density*, Lectures given at 40th Internationale Universitätswochen fuer Theoretische Physik: Ddense Matter (IUKT 40), Schladming, Styria, Austria, 3-10 Mar 2001, hep-lat/0106019.
- [Klu01] S. Kluth, *Experimental studies of power corrections*, Contribution to Recontres de Moriond: QCD and High Energy Hadronic Interactions, Les Arcs, France, March 17 - 24, 2001, hep-ex/0104016.
- [KO79] T. Kugo et I. Ojima, *Local covariant operator formalism of nonabelian gauge theories and quark confinement problem*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **66** (1979) 1.
- [Kon01a] K.-I. Kondo, *Vacuum condensate of mass dimension two as the origin of mass gap and quark confinement*, Phys. Lett. **B514** (2001) 335, hep-th/0105299.
- [Kon01b] K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara et T. Imai, *Renormalizing a BRST-invariant composite operator of mass dimension 2 in Yang-Mills theory*, Phys. Rev. **D65** (2002) 085034, hep-th/0111256.
- [KS75] J. Kogut et L. Susskind, *Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories*, Phys. Rev. **D11** (1975) 395.
- [KS81] L. H. Karsten et J. Smit, *Lattice fermions: species doubling, chiral invariance and the triangle anomaly*, Nucl. Phys. **B183** (1981) 103.

- [Lan02] , K. Langfeld, *Vortex induced confinement and the Kugo-Ojima confinement criterion?*, hep-lat/0204025.
- [Lar85] T.I. Larson, *Nonperturbative propagators in quantum chromodynamics*, Phys. Rev. **D32** (1985) 956.
- [LDP92] F. Le Diberder et A. Pich, *Testing QCD with  $\tau$  decays*, Phys. Lett. **B289** (1992) 165.
- [Lem02] V.E.R. Lemes, M.S. Sarandy, S.P. Sorella, M. Picariello et A.R. Fazio, *Ghost condensates in Yang-Mills theories in nonlinear gauges*, Mod. Phys. Lett. **A18** (2003) 711, hep-th/0210036.
- [Lip97a] Th. Lippert, G. Bali, N. Eicker, L. Giusti, U. Glaessner, S. Guesken, H. Hoerber, P. Lacock, G. Martinelli, F. Rapuano, G. Ritzenhoefer, K. Schilling, G. Siegert, A. Spitz, P. Ueberholz et J. Viehoff, *SESAM and TXL Results for Wilson Action—A Status Report*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **A60** (1998) 311, hep-lat/9707004.
- [Lip97b] Th. Lippert, *The Hybrid Monte Carlo algorithm for Quantum Chromodynamics*, Proc. of the Workshop of the Graduiertenkolleg at the university of Wuppertal on "Field Theoretical Tools for Polymer and Particle Physics", hep-lat/9712019.
- [LL00] L. Lellouch et M. Lüscher, *Weak transition matrix elements from finite-volume correlation functions*, Comm. Math. Phys. **219** (2001) 31, hep-lat/0003023.
- [LM92] G.P. Lepage et P. Mackenzie, *On the viability of lattice perturbation theory*, Phys. Rev. **D48** (1992) 2250, hep-lat/9209022.
- [LO92] M. Lavelle et M. Oleszczuk, *The operator product expansion of the QCD propagators*, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 3617.
- [LRG01] K. Langfeld, H. Reinhardt et J. Gattnar, *Gluon propagator and quark confinement*, Nucl. Phys. **B621** (2002) 131, hep-ph/0107141.
- [LS02] C. Lerche et L. von Smekal, *On the infrared exponent for gluon and ghost propagation in Landau gauge QCD*, Phys. Rev. **D65** (2002) 125006, hep-ph/0202194.
- [LSS02] V.E.R. Lemes, M.S. Sarandy et S.P. Sorella, *ghost condensates in Yang-Mills theories in the Landau gauge*, hep-th/0210077.
- [Lue94] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz et U. Wolf, *A precise determination of the running coupling in the SU(3) Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B413** (1994) 481, hep-lat/9309005.
- [Ma99] J.P. Ma, *A study of gluon propagator on coarse lattice*, Mod. Phys. Lett. **A15** (2000) 229, hep-lat/9903009.
- [Man99] J.E. Mandula, *The gluon propagator*, Phys. Rep. **315** (1999) 273.



## BIBLIOGRAPHIE

- [Mar94] G. Martinelli, C. Pittori, C.T. Sachrajda, M. Testa, A. Vladikas, *A General Method for Non-Perturbative Renormalization of Lattice Operators*, Nucl. Phys. **B445** (1995) 81, hep-lat/9411010.
- [Mic95] C. Michael, *Cooling of the  $SU(2)$  instanton vacuum*, Phys. Rev. **D52** (1995) 4691, hep-lat/9503018.
- [MRT53] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller et E. Teller, *Equation of state calculations by fast computing machines*, J. Chem. Phys. **21** (1953) 1087.
- [MT90] L. Maiani et M. Testa, *Final state interaction from euclidean correlation functions*, Phys. Lett. **B245** (1990) 585.
- [Mue93] A.H. Mueller, *The QCD perturbation series*, in *QCD: Twenty years later*, ed. P.M. Zerwas et H.A. Kastrup, World Scientific, 1993.
- [Mut98] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics, An introduction to perturbative methods in gauge theories*, World Scientific Lectures Notes in Physics Vol. 57, 1998.
- [Nar95] S. Narison, *Heavy quarkonia mass splittings in QCD: gluon condensate,  $\alpha_S$  and  $\frac{1}{M}$  expansion*, Phys. Lett. **B387** (1996) 162, hep-ph/9512348.
- [Neg98] J.W. Negele, *Instantons, the QCD vacuum, and hadronic physics*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B73** (1999) 92, hep-lat/9810053.
- [NN81a] H.B. Nielsen et M. Ninomiya, *Absence of neutrinos on a lattice. 1. Proof by homotopy theory*, Nucl. Phys. **B185** (1981) 20.
- [NN81b] H.B. Nielsen et M. Ninomiya, *Absence of neutrinos on a lattice. 2. Intuitive topological proof*, Nucl. Phys. **B193** (1981) 173.
- [NP88] S. Narison et A. Pich, *QCD formulation of the tau decay and determination of  $\Lambda^{\overline{MS}}$* , Phys. Lett. **B211** (1988) 183.
- [Nes02] A.V. Nesterenko, *Analytic invariant charge: non-perturbative aspects*, Talk given at 5th International Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Gargnano, Brescia, Italy, 10-14 Sep 2002, hep-ph/0210122.
- [Neu86] H. Neuberger, *Nonperturbative BRS invariance*, Phys. Lett. **B175** (1986) 69.
- [Neu95] M. Neubert, *QCD analysis of hadronic  $\tau$  decays revisited*, Nucl. Phys. **B463** (1996) 511, hep-ph/9509432.
- [Neu98a] H. Neuberger, *Exactly massless quarks on the lattice*, Phys. Lett. **B417** (1998) 141, hep-lat/9707022.
- [Neu98b] H. Neuberger, *More about exactly massless quarks on the lattice*, Phys. Lett. **B427** (1998) 353, hep-lat/9801031.
- [Neu98c] H. Neuberger, *Chirality on the lattice*, Talk at ICHEP'98, hep-lat/9808036.

- [OPA99] K. Akerstaff et al., Coll. OPAL, *Measurement of the strong coupling constant  $\alpha_s$  and the vector and axial-vector spectral functions in hadronic tau decays*, Eur. Phys. J. **C7** (1999) 571.
- [Pac94] M.L. Paciello, S. Petrarca, B. Taglienti, A. Vladikas, *Gribov Noise on the Lattice Axial Current Renormalisation Constant*, Phys. Lett. **B341** (1994) 187, hep-lat/9409012.
- [Par94] C. Parrinello, *Exploratory study of the three-gluon vertex on the lattice*, Phys. Rev. **D50** (1994) 4247, hep-lat/9405024.
- [PDG02] I. Hinchliffe, *Quantum Chromodynamics*, Particle Data Group, Phys. Rev. **D66** (2002), Particles and Fields.
- [Riv87] R.J. Rivers, *Path integral methods in quantum field theory*, Cambridge Monographs On Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1987.
- [Riv91] V. Rivasseau, *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton University Press, 1991.
- [RS99] A. Ringwald et F. Schrempp, *Confronting instanton perturbation theory with QCD lattice results*, Phys. Lett. **B459** (1999) 249, hep-lat/9903039.
- [SBZ02] , L. Stodolsky, P. van Baal, V.I. Zakharov, *Defining  $\langle A^2 \rangle$  in the finite volume hamiltonian formalism*, Phys. Lett. **B552** (2003) 214, hep-th/0210204.
- [Sch98] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1998.
- [SF82] M.A. Semenov-Tyan-Shanskii et V.A. Franke, Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im V.A. Steklov AN SSSR, 120 (1982) 159. Traduction : Plenum, New York, 1986, p. 1999.
- [Sha00] S. Sharpe, *Physical results from unphysical simulations*, Phys. Rev. **D62** (2000) 094503, hep-lat/0006017.
- [Shi02a] D.V. Shirkov, *On the QCD coupling behaviour in the infrared region*, Theor. Math. Phys. 132 (2002) 1309, hep-ph/0208082.
- [Shi02b] D.V. Shirkov, *On the Fourier transformation of renormalization invariant coupling*, hep-th/0210013.
- [Shu82a] E. Shuryak, *The role of instantons in quantum chromodynamics. 1. Physical vacuum*, Nucl. Phys. **B203** (1982) 93.
- [Shu82b] E. Shuryak, *The role of instantons in quantum chromodynamics. 2. Hadronic structure*, Nucl. Phys. **B203** (1982) 116.
- [Shu82c] E. Shuryak, *The role of instantons in quantum chromodynamics. 3. Quark-gluon plasma*, Nucl. Phys. **B203** (1982) 140.
- [SK02] J. Skullerud et A. Kizilersü, *Quark-gluon vertex from lattice QCD*, J. High Energy Phys. **09** (2002) 013, hep-ph/0205318v2.

- [Sok96] A. Sokal, *Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics : Foundations and New Algorithms*, Lectures at the Cargèse Summer School on “Functional Integration : Basics and Applications”, 1996.
- [Som97] R. Sommer, *Non-perturbative renormalization of QCD*, Lectures given at the 36. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik, (Schladming 97) : computing particles, hep-ph/9711243.
- [Spi99] A. Spitz, H. Hoerber, N. Eicker, S. Guesken, Th. Lippert, K. Schilling, T. Struckmann, P. Ueberholz, J. Viehoff,  $\alpha_S$  from Upsilon spectroscopy with dynamical Wilson fermions, Phys. Rev. **D60** (1999) 074502, hep-lat/9906009.
- [Spr77] T.A. Springer, *Invariant theory*, Lectures Notes in Mathematics 585, Springer-Verlag (1997).
- [SRQ01] F. de Soto et J. Rodríguez-Quintero, *Remarks on the determination of the Landau gauge OPE for the asymmetric three-gluon vertex*, Phys. Rev. **D64** (2001) 114003, hep-ph/0105063.
- [SS96] T. Schaefer et E. Shuryak, *Instantons in QCD*, Rev. Mod. Phys. 70 (1998) 323, hep-ph/9610451.
- [SS99] I.L. Solovtsov et D.V. Shirkov, *Analytic approach in quantum chromodynamics*, Theor. Math. Phys. 120 (1999) 1220-, hep-ph/9909305.
- [ST98] D.A. Smith et M.J. Teper, *Topological structure of the SU(3) vacuum*, Phys. Rev. **D58** (1998) 014505, 1998, hep-lat/9801008.
- [SVZ78a] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *QCD and resonance physics. Theoretical foundations*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 385.
- [SVZ78b] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *QCD and resonance physics. Applications*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 448.
- [SVZ78c] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *QCD and resonance physics: The  $\rho - \omega$  mixing*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 519.
- [SVZ79] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov,  *$\eta$  puzzle in quantum chromodynamics*, Phys. Lett. **B77** (1978) 80.
- [SW64] R. F. Streater et A. S. Wightman, *PCT, spin & statistics and all that*, Benjamin, New York, 1964.
- [SW02] R. Sommer, H. Wittig, *Fundamental parameters of QCD*, Contribution to proceedings of NIC Symposium 2001, physics/0204015.
- [Tep80] M. Teper, *Instantons and the  $\frac{1}{N}$  expansion*, Zeit. Phys. **C5** (1980) 233.
- [Tep97] M.J. Teper, *Physics from the lattice ; glueballs in QCD ; SU(N) for all N.*, hep-lat/9711011.
- [tHo76a] G.’t Hooft, *Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies*, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8.

- [tHo76b] G.'t Hooft, *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle*, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432, Erratum-ibid. **D18** (1978) 2199.
- [tHo77] G. 't Hooft, in *The whys of subnuclear physics*, Proc. Int. School, Erice, Italy, 1977, ed. A. Zichichi, Plenum, New York, 1977.
- [TM83] C. Taylor et B. McClain, *Operator-product expansion and the asymptotic behavior of spontaneously broken scalar field theories*, Phys. Rev. **D28** (1983) 1364.
- [Ven79] G. Veneziano,  *$U(1)$  without instantons*, Nucl. Phys. **B159** (1979) 213.
- [Ver01] H. Verschelde, K. Knecht, K. van Acoleyen et M. Vanderkelen, *The non-perturbative groundstate of QCD and the local composite operator  $A_\mu^2$* , Phys. Lett. **B516** (2001) 307, hep-th/0105018.
- [Web98] B.R. Webber, *QCD power corrections from a simple model for the running coupling*, J. High Energy Phys. **10** (1998) 012, hep-ph/9805484.
- [Wei96] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Volume 2 : modern applications, Cambridge University Press, 1996.
- [Wil69] K.G. Wilson, *Non-Lagrangian models of current algebra*, Phys. Rev. **179** (1969) 1499.
- [Wil75] K.G. Wilson, *Quarks and strings on a lattice*, in *New Phenomena in Subnuclear Physics*, ed. A. Zichichi (Plenum Press, New York, 1975).
- [Wit79] E. Witten, *Current algebra theorems for the  $U(1)$  "Goldstone boson"*, Nucl. Phys. **B156** (1979) 269.
- [Zim70] W. Zimmermann, *Local operator products and renormalization in quantum field theory*, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, ed. Deser et al. (MIT Press, 1970).
- [Zin02] J. Zinn-justin, *Chiral anomalies and topology*, hep-th/0201220.
- [Zwa82] D. Zwanziger, *Non-perturbative modification of the Faddeev-Popov formula and banishment of the naive vacuum*, Nucl. Phys. **B209** (1982) 336.
- [Zwa91a] D. Zwanziger, *Vanishing color magnetization in lattice Landau and Coulomb gauge*, Phys. Lett. **B257** (1991) 168.
- [Zwa91b] D. Zwanziger, *Vanishing of zero-momentum lattice gluon propagator and color confinement*, Nucl. Phys. **B364** (1991) 127.
- [Zwa01] D. Zwanziger, *Non-perturbative Landau gauge and infrared critical exponents in QCD*, Phys. Rev. **D65** (2002) 094039, hep-th/0109224.
- [Zwa02] D. Zwanziger, *Time-independant stochastic quantization, DS equations and infrared critical exponents in QCD*, Phys. Rev. **D67** (2003) 105001, hep-th/0206053.





Cette thèse présente une évaluation sur réseau de la constante de couplage de la Chromodynamique Quantique (QCD) en jauge de Landau, dans des schémas de renormalisation de type “Momentum Subtraction” (MOM), à partir du calcul non-perturbatif du vertex à trois gluons. Ce travail a été mené avec deux saveurs dégénérées de quarks de Wilson dynamiques. Il prend place au sein d’un programme scientifique comprenant déjà une analyse similaire dans le cadre de la théorie “pure jauge”.

Dans les deux cas, l’interprétation des données numériques requiert l’introduction d’un condensat  $\langle A^2 \rangle$  au moyen des techniques de développement en produit d’opérateurs (OPE). La contribution de cette correction en puissance est non-négligeable jusqu’à 10 GeV dans le cas “pure jauge”, mais sa prise en compte rend satisfaisant l’accord de l’ensemble des résultats “quenched” et “unquenched” avec les données expérimentales.

Par ailleurs, ce travail propose aussi un mécanisme physique de création du condensat  $\langle A^2 \rangle$  dans le cadre d’un modèle de liquide ou de gaz d’instantons. Cette image permet de plus d’interpréter de manière cohérente le comportement de la constante de couplage forte dans l’infra-rouge profond.

**Mots clés :** Chromodynamique Quantique - Constante de couplage forte - Instanton - QCD sur réseau - Quarks dynamiques - Développement en produit d’opérateurs - Condensat  $\langle A^2 \rangle$ .

This thesis provides a lattice evaluation of the coupling constant of Quantum Chromodynamics (QCD) in Landau gauge, in “Momentum Subtraction”-like renormalisation schemes (MOM), from a non-perturbative computation of the three-gluon vertex. This work was achieved with two flavours of Wilson dynamical quarks. It takes place in a scientific program which already contains a similar analysis in the framework of the “pure gauge” theory.

In both cases, interpreting numerical data requires the introduction of a  $\langle A^2 \rangle$ -condensate using the technics of the operator-product expansion (OPE). The contribution of this power correction is non-negligible till 10 GeV in the “pure gauge” case, but taking it into account gives a satisfactory agreement between the set of “quenched” as well as “unquenched” results with experimental data.

Otherwise, this work also suggests a physical mechanism creating a  $\langle A^2 \rangle$ -condensate in the framewok of a model of instanton gaz or liquid. Moreover, this picture allows to interpret the behaviour of the strong coupling constant in the deep infra-red region in a consistent way.

**Key words :** Quantum Chromodynamics - Strong Coupling Constant - Instanton - Lattice QCD - Dynamical quarks - Operator-product expansion -  $\langle A^2 \rangle$ -condensate